

Inhalte aus BM00:

Potenzen, Beträge, Brüche

Gleichungen auflösen

Summen, Induktion

Funktionen, insb. quadratisch, Polynome, exp, log

Graphen, inverse Funktionen

Steigung, Ableitung (Anwendungen)

Extrempunkte, Wendepunkte

Integrale und einfache Differentialgleichungen

Finanzmathematik

Funktionen von 2 und mehr Variablen

partielle Elastizitäten.

Multivariate Optimierung ohne Nebenbedingungen
(meist 2 Variablen)

Multivariate Optimierung mit Nebenbedingungen
(meist 2 Variablen)

Inhalte im BM03:

- Systematische Behandlung von mehreren Variablen: Vektoren & Matrizen
- Determinanten & inverse Matrizen
- Vertiefung der Differentialrechnung mit einer und mehreren Variablen
(Gradient, Richtung des steilsten Anstiegs)
- Lokale Minimalstellen ohne & mit Nebenbedingungen
- Exkurs: Lineare Programme
Spieltheorie
- Wiederholung: Integralrechnung (1 Variable)

I Vektoren & Matrizen

3

In Anlehnung an Sydsæter/Hammonds

Kap 15:

Motivation

Eine Größe $y \in \mathbb{R}$, die von Interesse ist (z.B. ein Umsatz) möge von verschiedenen anderen Größen aus $\mathbb{R}$ (z.B. $x_1 = \text{Energiepreis}$, $x_2 = \text{Rohstoffpreis}$, $x_3 = \text{Steuersatz}$, ..., x_n) abhängen.

Definition 1.1

Die Größen $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ fassen wir in einer Liste, d.h. in einem

$$\underline{\text{Vektor}} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Zusammen.

Eine "Tabelle" von reellen Zahlen fassen wir

in einer $m \times n$ - Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ④

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

mit $a_{ij} \in \mathbb{R}$ für $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$

Zusammen.

Die Matrix hat $m \cdot n$ reelle Einträge.

Um anzuzeigen, dass diese wie oben in einer "Tabelle" angeordnet sind und

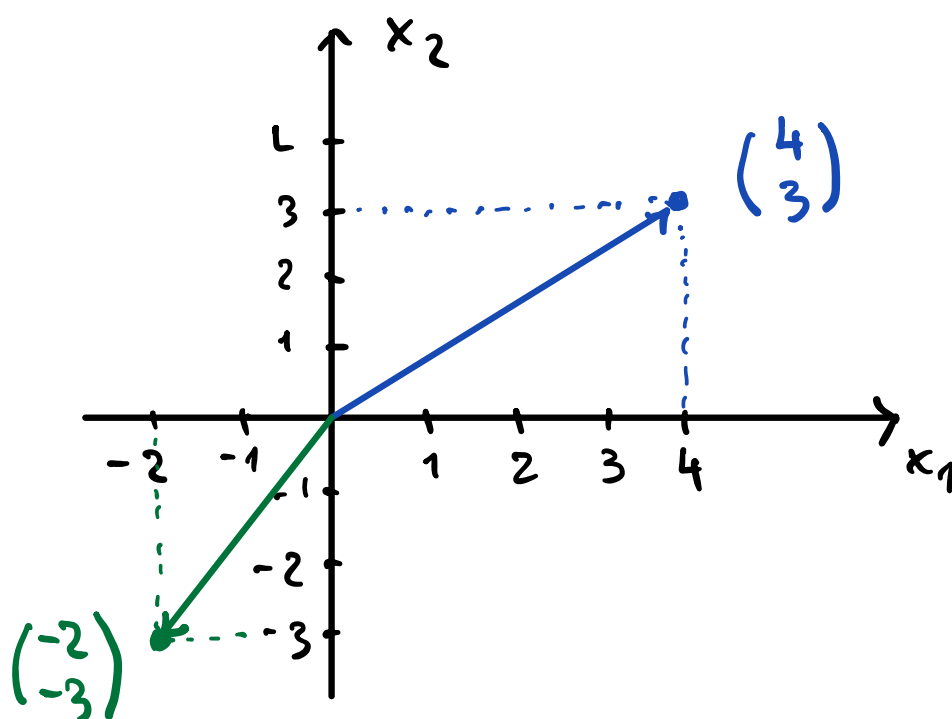
nicht in einem Vektor mit $m \cdot n$ Einträgen schreiben wir $\mathbb{R}^{m \times n}$.

"Kreuz"

⑤

Der Raum der Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$ hat die "Dimension" n . (Jeder Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ ist durch die Festlegung der n Zahlen $x_1, \dots, x_n$ eindeutig bestimmt.)

Für $n = 2$ lassen sich Vektoren als Punkte in der Ebene (oder als "Richtungsvektoren" von $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ zu diesen Punkten hin) darstellen.



⑥

Nach dem Satz von Pythagoras ist die Länge l des Vektors nach $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ durch die Gleichung $l^2 = 4^2 + 3^2$ bestimmt, d. h. $l = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$.

Möchte man einen Vektor mit 3 Komponenten darstellen, z. B. den Vektor $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$ so kann man die 3. Komponente entlang einer Achse senkrecht zur Papierebene auftragen. Der Punkt x wird dann "schwebend" 12 Einheiten über dem Punkt $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ in obigem Bild aufgetragen. Für die Berechnung seiner Länge $\hat{l}$ benutzt man wieder den Satz von Pythagoras, $\hat{l}^2 = 5^2 + 12^2 = 4^2 + 3^2 + 12^2$, bzw.

$$\hat{l} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} = \sqrt{16 + 9 + 144} = \sqrt{169} = 13.$$

Allgemeiner definiert man für $x \in \mathbb{R}^n$ die "Euklidische Länge" bzw. die 2-Norm durch

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

(7)

Eine häufig vorkommende Operation
zwischen Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$ und Matrizen
 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist die Matrix-Vektor-

Multiplikation : $A \cdot x =$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

$$\in \mathbb{R}^m.$$

Notwendig:

Spalten von A = # Einträge von x
 $\uparrow$
 "Anzahl"

Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ liegt
 $A \cdot x$ in $\mathbb{R}^m$.