

BM03, 10. Vorlesung (Lagrange-Multiplikatoren) ①

$f, g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar

- minimiere $f(x)$ wobei $g(x) \leq 0$ sei.

ii) $\bar{x}$ lokale Minimalstelle und $g(\bar{x}) < 0$

(die Forderung $g(x) \leq 0$ ist in der Nähe von $\bar{x}$ überflüssig, $\bar{x}$ ist auch eine lokale Minimalstelle von f ohne Beachtung von Nebenbedingungen)

$$\Rightarrow \nabla f(\bar{x}) = 0.$$

iii) $\bar{x}$ lokale Minimalstelle, $g(\bar{x}) = 0$, $\nabla g(\bar{x}) \neq 0$

$$\Rightarrow \exists \lambda \geq 0 : \nabla f(\bar{x}) + \lambda \nabla g(\bar{x}) = 0 \quad \text{bzw. } \nabla f(\bar{x}) = -\lambda \nabla g(\bar{x})$$

Die Forderung, dass $\nabla g(\bar{x}) \neq 0$ sei ist eine
Regularitätsbedingung.

Hier war nur eine Nebenbedingung gegeben.

Im Fall von mehreren Nebenbedingungen ist die Regularitätsbedingung etwas komplizierter:

②

Vektoren $a^1, \dots, a^k \in \mathbb{R}^n$ heißen linear unabhängig wenn die Zeilenstufenform

$$\text{der Matrix } \begin{pmatrix} (a^1)^T \\ \vdots \\ (a^k)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^k & a_2^k & \dots & a_n^k \end{pmatrix}$$

keine Nullzeile besitzt.

Dies ist genau dann der Fall, wenn das

Gleichungssystem

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + \dots + x_k a^k = 0 \in \mathbb{R}^n$$

nur die Lösung $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$ besitzt.

"Keines der a^i kann aus einer Kombination der restlichen a^j gebildet werden." ($\rightarrow$ Tafel).

(Ein einzelner Vektor a^1 ist linear unabhängig wenn $a^1 \neq 0$ ist.)

Satz 10.1 (Lagrange - Multiplikatoren) (3) (KKT - Bedingungen)

Seien $f_0, f_1, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig diff'bar, $p \in \mathbb{N}$, $p \leq m$ und $\bar{x}$ eine lokale Minimalstelle des Problems

minimiere $f_0(x)$ wobei $f_i(x) \leq 0$, $f_j(x) = 0$ für $1 \leq i \leq p < j \leq m$

Setze $I(\bar{x}) := \{i \in \{1, \dots, p\} \mid f_i(\bar{x}) = 0\}$

Die Nebenbedingungen aus $\{1, \dots, p\}$, die in $\bar{x}$ "aktiv" sind.

Wenn die Vektoren $\nabla f_\ell(\bar{x})$ für $\ell \in I(\bar{x}) \cup \{p+1, \dots, m\}$

linear unabhängig sind, (Regularitätsbedingung)

dann gibt Zahlen $\lambda_1 \geq 0, \dots, \lambda_p \geq 0, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_m$

so dass

$$\nabla f_0(\bar{x}) + \sum_{\ell=1}^m \lambda_\ell \nabla f_\ell(\bar{x}) = 0 \quad \text{und}$$

$$\lambda_i f_i(\bar{x}) = 0 \quad (1 \leq i \leq p)$$

sowie $f_i(\bar{x}) \leq 0$, $f_j(\bar{x}) = 0$ ($1 \leq i \leq p < j \leq m$).

wenn man eine Minimalstelle von $\square$ sucht, kann man also $\otimes$ lösen und unter den gefundenen Lösungen die beste auswählen. (Reg. bed. beachten!)

④

Die λ_i nennt man Lagrange-Multiplikatoren.

Die Funktion $L: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$L(x, \vec{\lambda}) := f_0(x) + \sum_{\ell=1}^m \lambda_\ell f_\ell(x)$$

heißt Lagrange-Funktion.

Bsp 1: minimiere $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ wobei $-1 \leq x_i \leq 1$
für $i = 1, 2$

Bsp 2: minimiere $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ wobei $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$

(Für die Regularitätsbedingung gibt es auch noch schwächere Formulierungen, die hier angegeben ist aber auf jeden Fall hinreichend.)

Notation 10.2

Ein Paar $(\bar{x}, \vec{\lambda})$ wie in $\otimes$ heißt auch KKT Paar (Karush, Kuhn, Tucker) und $\bar{x}$ heißt KKT-Punkt

⑤

Die Bedingungen $\star$ heißen auch
"notwendige Optimalitätsbedingungen".

(Sie müssen erfüllt sein, wenn alle f_i
stetig differenzierbar sind und in $\bar{x}$ die
Regularitätsbedingung erfüllt ist.)

Satz 10.3 (Existenz von Optimalstellen)

Sei $S \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene und
beschränkte Menge und $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
stetig. Dann hat $\min \{f(x) \mid x \in S\}$
mindestens einen globalen Minimalpunkt $\bar{x}$.

S könnte in der Gestalt

$$S = \{x \mid f_i(x) \leq 0, f_j(x) = 0 \quad (1 \leq i \leq p < j \leq m)\}$$

gegeben sein mit stetigen $f_e: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Dann ist S auf jeden Fall abgeschlossen.