

Wiederholung (letzte Std): $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (x_1, x_2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - (3, 7) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\bar{x} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ist $\nabla^2 f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ pos. definit?

Satz: 12.1 (Hurwitz-Kriterium):

Eine symmetrische Matrix A ist positiv definit
 $\Leftrightarrow$ die "führenden Hauptunterdeterminanten von A
 sind positiv. $\leadsto$ **Tafel** (obiges Bsp: ...)

! A ist pos. semidef. $\Leftrightarrow$ alle Hauptunterdet. ≥ 0 (Bsp. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$)

• Allg. ist für $A = A^T$ und $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) \equiv \frac{1}{2} x^T A x \quad \text{der Gradient} \quad \nabla f(x) = Ax$$

und die Hessematrix $D^2 f(x) = A$.

• Für $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) \equiv c^T x$ ($c \in \mathbb{R}^n$ fest)

ist $\nabla f(x) = c$ und $D^2 f(x) = 0$.

②

Betrachte nun wieder stetig diff'bare f_e ($0 \leq e \leq m$) und

$$(P) \min f_0(x) \mid f_i(x) \leq 0, f_j(x) = 0 \quad 1 \leq i \leq p < j \leq m$$

Sei $\bar{x}$ eine lokale Minimalstelle und sei die

Regularitätsbedingung in $\bar{x}$ erfüllt, d.h.

$$\{ \nabla f_e(\bar{x}) \}_{e \in I(\bar{x}) \cup \{p+1, \dots, m\}} \text{ linear unabhängig (nicht "redundant")}$$

"da wo $f_e(\bar{x}) = 0$ gilt"

(die f_i mit $f_i(\bar{x}) < 0$ sind in der Nähe von $\bar{x}$ überflüssig)

Dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}^m$ mit $\lambda_i \geq 0$ für $i \leq p$,

$\lambda_i = 0$ falls $f_i(\bar{x}) < 0$ (bzw. $\lambda_i \cdot f_i(\bar{x}) = 0$)

$$\text{und } \nabla f_0(\bar{x}) + \sum_{e=1}^m \lambda_e \nabla f_e(\bar{x}) = 0 \quad \textcircled{*}$$

$$x \mapsto f_0(x) + \sum_{e=1}^m \lambda_e f_e(x) =: L(x, \lambda)$$

nennt man auch die Lagrange-Funktion

$$\text{und } \textcircled{*} \text{ sagt } D_x L(\bar{x}, \lambda) = 0.$$

← "Ableitung nach x"

Fakt:

③

Wenn man obiges λ fest hält, hat die Abbildung $x \mapsto L(x, \lambda)$ einen "kritischen Punkt" bei $\bar{x}$ (die Ableitung ist Null) und wenn auch die zweite Ableitung $D_{xx}^2 L(\bar{x}, \lambda)$ existiert und positiv definit ist, so ist $\bar{x}$ nicht nur lokale Minimalstelle von $L(\cdot, \lambda)$ sondern auch von (P). (Etwas schwächer reicht sogar aus, dass

$$s^T D_{xx}^2 L(\bar{x}, \lambda) s > 0 \quad \forall s \neq 0 \text{ mit}$$

$$(Df_e(\bar{x})) s = 0 \quad \forall l \in \{i: y_i > 0\} \cup \{p+1, \dots, m\})$$

um garantieren zu können, dass $\bar{x}$ eine lokale Minimalstelle von (P) ist. nur der Vollständigkeit halber, nicht klausur-relevant !)

Umgekehrt muss

$$s^T D_{xx}^2 L(\bar{x}, \lambda) s \underline{\geq} 0 \quad \forall s \neq 0 \text{ mit}$$

$$(Df_e(\bar{x})) s = 0 \quad \forall l \in \{i: f_i(\bar{x}) = 0\} \cup \{p+1, \dots, m\})$$

erfüllt sein, wenn $\bar{x}$ eine lok. Min.stelle ④
von (P) ist, in der die Regularitätsbed.
erfüllt ist. (Ebenfalls nicht Klausur-relevant!)

• Interpretation von λ :

Gleichgewicht: Zielfunktion $\longleftrightarrow$ Nebenbedingungen

Wichtige Anwendung:

$$(LP) \quad \min \{ c^T x \mid Ax = b, x \geq 0 \}$$

"Lineares
Programm"

$$m \begin{array}{|c|} \hline A \\ \hline n \end{array}$$

↑
Komponenten-
weise

Daten: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$

"Standardform, durch elementare Umformungen
können viele Probleme in diese Form gebracht werden."

Setze $A = \begin{bmatrix} (a^{(n+1)})^T \\ \vdots \\ (a^{(n+m)})^T \end{bmatrix}$, d.h. die

Zeilen seien von $n+1, \dots, n+m$ durch nummeriert.

5

$$\min \underbrace{c^T x}_{f_0(x)} \mid \underbrace{-x_i \leq 0}_{f_i(x)}, \quad \underbrace{b_j - (a^j)^T x = 0}_{f_j(x)} \quad 1 \leq i \leq n < j \leq \tilde{m}$$

mit $\tilde{m} = n+m$

$$\nabla f_0(x) = c, \quad \nabla f_i(x) = -e_i, \quad \nabla f_j(x) = -a^j$$

Wenn $\bar{x}$ eine Optimallösung ist, so gibt es

$$\lambda_\ell \geq 0 \quad (1 \leq \ell \leq n)$$

$$\lambda_j \in \mathbb{R} \quad (j \geq n+1)$$

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n \rightsquigarrow s_1, \dots, s_n \geq 0$$

$$\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{n+m} \rightsquigarrow y_1, \dots, y_m) \quad \text{mit:}$$

$$\nabla f_0(\bar{x}) + \sum_{i=1}^n s_i \nabla f_i(\bar{x}) - \sum_{\ell=1}^m y_\ell a^{\ell+n} = 0$$

$$c - s - A^T y = 0$$

$$x_i \cdot s_i = 0 \quad \text{für } 1 \leq i \leq n$$

(Die Regularitätsbedingung wird hier nicht gebraucht und lokale Minimalstellen sind hier auch global optimal!)

6

Zusammenfassung:

Wenn $\bar{x}$ eine Optimallösung von (LP) ist

gibt es $s \geq 0$, $s \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ mit

$$\left. \begin{array}{ll} A\bar{x} = b & \bar{x} \geq 0 \\ A^T y + s = c & s \geq 0 \\ x_i, s_i = 0 & (1 \leq i \leq n) \end{array} \right\} \quad \otimes \otimes$$

Dies ist der Dualitätssatz der linearen Programmierung:

Löse statt (LP) das Problem

$$(LD) : \quad \max \quad b^T y \quad | \quad A^T y + s = c, \quad s \geq 0$$

wieder Komponentenweise

Wenn nun x zulässig ist für (LP)

"die Bedingungen von (LP) erfüllt"

und y, s zulässig sind für (LD), so gilt

⑦

$$c^T x - b^T y = \underbrace{(A^T y + s)^T x}_{\text{aus (LD)}} - \underbrace{(A x)^T y}_{\text{aus (LP)}} = [y^T A x + s^T x] - x^T A^T y$$

$$= \underbrace{s^T x}_{\geq 0} \geq 0 \quad (\text{weil } y^T A x = x^T A^T y)$$

also immer $c^T x \geq b^T y$.

Für obiges $\bar{x}$ und das dazugehörige s, y gilt sogar $s^T \bar{x} = 0$, d.h. $c^T \bar{x} = b^T y$, d.h. $\bar{x}$ ist optimal für (LP) und das dazugehörige s, y ist optimal für (LD).

Man nennt (LD) auch das duale Problem.

(Anwendung: Nash - Gleichgewichtspunkte).

Erläuterung / Skizze am Beispiel

$$(LP) \quad \min (3, 2, 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mid (1, 1, 1) x = 1, x \geq 0$$

$$(LD) \quad \max y \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot y + \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, s \geq 0.$$