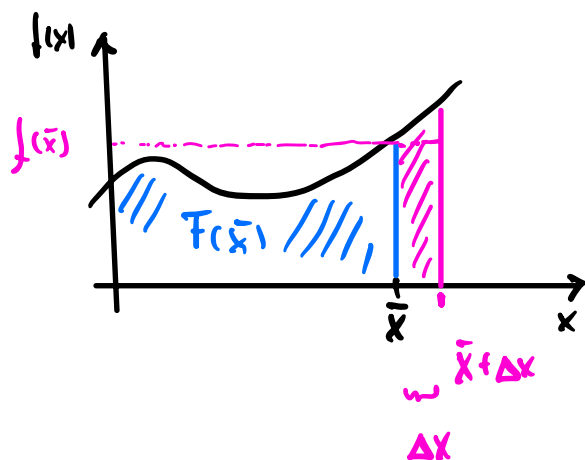


V Integration (Wiederholung)

- Im Folgenden wird Stetigkeit/Diff'barkeit frei vorausgesetzt.

Motivation: Fläche $F(x)$ zwischen x -Achse und Graph von f im Bereich $[0, \bar{x}]$:



$$F(\bar{x} + \Delta x) \approx F(\bar{x}) + f(\bar{x}) \cdot \Delta x$$

"charakteristische Gleichung": $F(\bar{x} + \Delta x) \approx F(\bar{x}) + \boxed{F'(\bar{x})} \cdot \Delta x$

bei beiden Gleichungen ist die Approximationsgüte $o(|\Delta x|)$ (unter passenden Voraussetzungen).

$\Rightarrow F'(\bar{x}) = f(\bar{x})$, F ist die "Aufleitung" von f
(die Stammfunktion)

Bis auf eine additive Konstante ist die Stammfunktion eindeutig.

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

②

$$\int_b^a f(x) dx = F(a) - F(b) = - \int_a^b f(x) dx.$$

Notation:

F ist eine Stammfunktion von f wenn $F'(x) \equiv f(x)$ für alle x aus dem Definitionsbereich von f .

Bei stetigen Funktionen existiert immer eine Stammfunktion. Die ist aber nicht immer explizit berechenbar.

Die Menge aller Stammfunktionen bezeichnet man als das unbestimmte Integral,

$$\int f(x) dx = \{ F \mid F'(x) \equiv f(x) \forall x \}$$

Gelegentlich schreibt man dafür auch

$$\int f(x) dx = F(x) + c \quad (\text{für ein } F \text{ mit } F' \equiv f).$$

Wir lassen das "+c" im Folgenden immer weg.

(3)

Berechnung des Integrals :

ii) Partielle Integration

$$\underbrace{\int (u(x) v(x))' dx}_{\equiv u(x) v(x)} = \int u'(x) v(x) dx + \int u(x) v'(x) dx$$

"erst ableiten, dann wieder aufleiten".

$$\underbrace{\int u'(x) v(x) dx}_{\text{"Schwieriger"}} = u(x) v(x) - \underbrace{\int u(x) v'(x) dx}_{\text{"einfacher"}}$$

$$\int \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^x}_{v'} dx = \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{e^x}_{v} dx = x e^x - e^x = (x-1) e^x.$$

$$\int \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{e^x}_{v'} dx = \dots$$

$$\int \ln(x) dx = \int \underbrace{1}_{v'} \cdot \underbrace{\ln(x)}_u dx = \underbrace{x}_v \underbrace{\ln(x)}_u - \int \underbrace{x}_v \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'} dx$$

$$= x \ln(x) - \int 1 dx = x \ln(x) - x$$

$$= x (\ln(x) - 1).$$

ii) Substitution

④

$$x \mapsto f(x) = y$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx} f(x) = \frac{dy}{dx}$$

behandle diese Darstellung so als wäre es ein Bruch:

$$\boxed{dx = \frac{dy}{f'(x)}}$$

$$\bullet \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{f'(x)}{y} \frac{dy}{f'(x)} = \int \frac{1}{y} dy$$

ersetze: $y = f(x)$

Rücksubstitution!

$$= \ln(y) = \ln(f(x)).$$



Probe: $(\ln(f(x)))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) \neq$

$$\text{Bsp: } \int \frac{x}{5+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\overset{+}{2x}}{\underset{+}{5+x^2}} dx = \frac{1}{2} \ln(5+x^2)$$

$$\bullet \int f(x)^n f'(x) dx \stackrel{y=f(x)}{=} \int y^n f'(x) \cdot \frac{dy}{f'(x)}$$

$$= \int y^n dy = \frac{y^{n+1}}{n+1} = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1}$$

⑤

$$\text{Bsp: } \int \frac{1-x^2}{x+x^3} dx = \int \frac{1}{x+x^3} dx - \int \frac{x^2}{x+x^3} dx$$

$$= \underbrace{\int \frac{1}{x(1+x^2)} dx}_{\textcircled{*}} - \underbrace{\int \frac{x}{1+x^2} dx}_{-\frac{1}{2} \ln(1+x^2)} \quad (\text{wie oben})$$

⊗ Ansatz: "Partialbruchzerlegung" (nicht klausurrelevant)

$$\frac{1}{x(1+x^2)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$$

$$1 \equiv A(1+x^2) + (Bx+C)x$$

$$\equiv A + Ax^2 + Bx^2 + Cx$$

$$\Rightarrow A = 1, \quad B = -1, \quad C = 0.$$

$$\frac{1}{x(1+x^2)} \equiv \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$$

$$\int \frac{1}{x(1+x^2)} dx = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x}{1+x^2} dx = \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$$

Insgesamt:

$$\int \frac{1-x^2}{x+x^3} dx = \ln x - \ln(1+x^2)$$

Probe

⑥

$$\bullet \int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{1+y} \cdot 2\sqrt{x} dy$$

$y = \sqrt{x} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$= \int \frac{1}{1+y} \cdot 2y dy$$

immer alle Terme in x eliminieren
dann erst integrieren

$$= 2 \int \frac{y}{1+y} dy = 2 \int \frac{1+y}{1+y}^{-1} dy$$

$$= 2 \left(\int 1 dy - \int \frac{1}{1+y} dy \right) = 2y - 2 \ln(1+y)$$

$$= 2\sqrt{x} - 2 \ln(1+\sqrt{x})$$

Probe...

$$\bullet \int \frac{a + b e^{cx}}{1 + e^{cx}} dx \quad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}, c > 0$$

"logistische Funktion"

$$= \int \frac{a(1+e^{cx}) + (b-a)e^{cx}}{1+e^{cx}} dx$$

$$= \int a \, dx + \frac{b-a}{c} \int \frac{c e^{cx}}{1+e^{cx}} \, dx$$

$\leftarrow f'(cx)$
 $\leftarrow f(cx)$

7

$$= ax + \frac{b-a}{c} \ln(1+e^{cx})$$

Integration von Elastizitäten

Letztes Semester: $f: (a,b) \rightarrow (c,d)$ diff'bar,
 $0 < a < b$, $0 < c < d$.

"Wenn die Eingabe x um 1% geändert wird, so ändert sich die Ausgabe etwa um $E_f(x)$ % wobei $E_f(x) = \frac{x f'(x)}{f(x)}$ die Elastizität von f in x ist."

Sei nun $E_f(x) \equiv 1-x$ gegeben. Wie sieht f aus?

Sei $h(x) \equiv 1-x$ und finde allgemeiner eine Funktion f mit $E_f(x) \equiv h(x)$.

8

Ansatz:

$$h(x) \equiv \frac{x f'(x)}{f(x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{h(x)}{x} \stackrel{(*)}{=} \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \text{"isoliere } f' \text{" (s. S. (4))}$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{h(x)}{x} dx \equiv \ln(f(x)) + c \quad \text{"eliminiere } f' \text{"}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\exp\left(\int \frac{h(x)}{x} dx - c\right)}_{\substack{\exp\left(\int \frac{h(x)}{x} dx\right) \underbrace{\exp(-c)}_{=: \tilde{c} > 0}}} = f(x)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \tilde{c} \exp\left(\int \frac{h(x)}{x} dx\right) \quad \text{mit } \tilde{c} > 0$$

Also: Berechne $g(x) := \int \frac{h(x)}{x} dx$ und setze $f(x) \equiv \tilde{c} e^{g(x)}$.

Obiges Beispiel:

$$g(x) = \int \frac{1-x}{x} dx = \int \frac{1}{x} - 1 dx = \ln(x) - x,$$

$$f(x) = \tilde{c} \exp(\ln(x) - x) = \tilde{c} \underbrace{(x \cdot e^{-x})}_{\exp(\ln(x))}$$

(maximaler Definitionsbereich: $(0, \infty)$)

Abschließendes Beispiel

⑨

$$\int \frac{\ln(x)}{x^3} dx = \int \underbrace{\ln(x)}_u \underbrace{\frac{1}{x^3}}_{v'} dx$$

$$v = -\frac{1}{2x^2}$$

$$= -\frac{\ln(x)}{2x^2} - \int \frac{1}{x} \left(-\frac{1}{2x^2}\right) dx$$

$$= -\frac{\ln(x)}{2x^2} + \int \frac{1}{2x^3} dx = -\frac{\ln(x)}{2x^2} - \frac{1}{4x^2}$$

Probe:

$$\left(-\frac{\ln(x)}{2x^2} - \frac{1}{4x^2}\right)' = -\frac{\frac{1}{x} 2x^2 - \ln(x) \cdot 4x}{4x^4} + \frac{1}{2x^3}$$

$$= -\frac{1 - 2\ln(x)}{2x^3} + \frac{1}{2x^3} = \frac{\ln(x)}{x^3} \quad \#$$