

Letzte Std: Integrale (Nachtrag)

Davor: Funktionen mehrerer Veränderlicher

$\nabla f(x)$ "Richtung des steilsten Anstiegs"

$-\nabla f(x)$ "Richtung des steilsten Abstiegs"

$\nabla f(\bar{x}) = 0$: "kritischer Punkt"

$D^2 f(\bar{x})$ pos. def. & $\nabla f(\bar{x}) = 0$:

"strikte lokale Min-stelle"

Lagrange - Multiplikatoren

"Lineare Programme"

$$\min c^T x \mid Ax = b, \quad x \geq 0$$

$$= \max b^T y \mid A^T y + s = c, \quad s \geq 0$$

↖ wenn mind. eines der beiden Probleme einen zulässigen Punkt besitzt und

$$\min c^T x \mid x \in \Phi := +\infty$$

$$\max b^T y \mid y \in \Phi := -\infty.$$

VI Beispiel, Spieltheorie

②

Gegeben eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und
zwei Spieler, die die Matrix kennen.

Spieler 1 wählt verdeckt eine Zeile i aus $\{1, \dots, m\}$

Spieler 2 wählt verdeckt eine Spalte j aus $\{1, \dots, n\}$

Dann wird die Wahl beider Spieler offengelegt und
Spieler 1 muss $A_{ij} \text{ €}$ an Spieler 2 bezahlen bzw.
bei $A_{ij} < 0$ bezahlt Spieler 2 $|A_{ij}| \text{ €}$ an Spieler 1.

- Risikoscheue Strategie für Spieler 1 :

$$\min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \max_{1 \leq j \leq n} A_{ij} \right\} \quad \boxed{\times}$$

um die maximale Zahlung an Spieler 2 zu minimieren

- Risikoscheue Strategie für Spieler 2 :

$$\max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \min_{1 \leq i \leq m} A_{ij} \right\}$$

um die maximale Zahlung an Spieler 1 zu minimieren

Gleichgewichtsstrategie, falls



③

$$\max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \min_{1 \leq i \leq m} A_{ij} \right\} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \max_{1 \leq j \leq n} A_{ij} \right\}$$

Beispiel:

Es gebe eine Zeile mit nur Einträgen ≤ 0

→ Spieler 1 wählt diese Zeile i

Es gebe auch eine Spalte mit nur Einträgen ≥ 0

→ Spieler 2 wählt diese Spalte j

Dann ist $A_{ij} = 0$.

Keiner der beiden Spieler kann seinen Gewinn verbessern indem er zu einer anderen Zeile/Spalte übergeht.

In der Regel ist nicht erfüllt.

Bsp: $\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ vs. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ $\leftarrow ?$
 $\uparrow$ $\leftarrow ?$

- Gefahr, dass der Gegenspieler meine Strategie errät und seine Wahl entsprechend trifft.

④

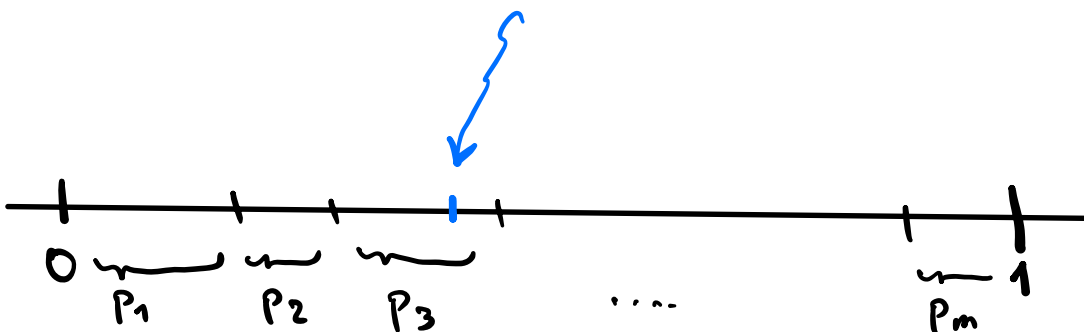
Benutze einen "Würfel" !!!

- und zwar so dass ein gewisser
Erwartungswert "best möglich" wird.

Spieler 1 möge Zeile i mit WS'keit p_i wählen:

$p_1, p_2, \dots, p_m \geq 0$ mit $p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$

(Pseudo-) Zufallszahl $z \in [0, 1]$ gleichverteilt.



WS'keit dass Zeile 3 gewählt wird ist p_3

Wenn nun Spieler 2 irgendeine Spalte j
gewählt hat, so ist der erwartete Verlust von
Spieler 1 bei dieser Strategie

$$\sum_{i=1}^m p_i A_{ij}$$

⑤

Wie soll Spieler 1 die p_i wählen?

Minimiere den schlimmsten möglichen erwarteten Verlust:

$$\begin{array}{l} \text{minimiere } \left\{ t \mid \sum_{i=1}^m p_i A_{ij} \leq t \text{ für } 1 \leq j \leq n, \right. \\ t \in \mathbb{R} \\ p \in \mathbb{R}^m \\ \left. p \geq 0, \sum_{i=1}^m p_i = 1 \right\} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{⊗} \text{⊗} \\ \text{⊗} \end{array}$$

Dies ist auch ein lineares Programm in einem etwas anderen Format ($\rightarrow$ Tafel)

Der Optimalwert von $\text{⊗} \text{⊗}$ ist in der Regel (wenn ⊗ nicht erfüllt ist) besser als der von ⊗ und dieser "worst-case-Erwartungswert" ist ganz unabhängig davon was Spieler 2 wählt!

(Denn ⊗ ist ja auch eine "zulässige Strategie für $\text{⊗} \text{⊗}$ aber eben nicht die best mögliche!)

$\rightarrow$ Erwartungswert: Wenn das Spiel mehrfach wiederholt wird oder viele gleichartige Spiele gespielt werden!

⑥

- Wenn Spieler 2 seine Strategie genauso festlegt
so ergibt sich für ihn das lineare Programm

$$\begin{array}{l} \text{maximiere } \tau \\ \tau \in \mathbb{R} \\ q \in \mathbb{R}^n \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n q_j A_{ij} \geq \tau \quad \text{für } 1 \leq i \leq m, \\ q \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n q_i = 1 \end{array} \right\}.$$

Die Optimalwerte dieser beiden Probleme stimmen überein, die optimalen Strategien sind aber nicht immer eindeutig bestimmt.

(Beweisidee:

Das 1. Problem in die Standardform umformen, das Dual Problem - mit demselben Optimalwert - bilden und dieses in das 2. Problem umformen.)