

## BM03, 2. Vorlesung

## Wiederholung:

①

$$\text{Für } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n} \text{ und } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{ist } A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

das Produkt von  $A$  und  $x$ .

(Das kommt sehr sehr häufig vor!)

Lineare Gleichungssysteme lassen sich kompakt schreiben als: "Finde  $x$  mit  $A \cdot x = b$ ."

Bsp:  $\sqrt{2}x_2 + 3(x_1 - x_2) = \sqrt{18} - 6$   
 $x_2 - 2x_1 + 1 = 2$

d.h.  $3x_1 + (\sqrt{2} - 3) \cdot x_2 = \sqrt{18} - 6$   
 $-2x_1 + 1 \cdot x_2 = 1$

Trotz der Wurzeln ein lineares Gleichungssystem

bzw.  $\begin{pmatrix} 3 & \sqrt{2} - 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{18} - 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

11.4.23 (2)

Erweiterte Koeffizientenmatrix  $(A|b)$ :

$$\left( \begin{array}{cc|c} 3 & \sqrt{2}-3 & \sqrt{18}-6 \\ -2 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Systematische Lösung mithilfe von "Zulässigen"

Zeilenoperationen, d.h. solchen "die zu einem äquivalenten Gleichungssystem führen mit exakt denselben Lösungen":

- Multiplikation einer Zeile mit einer Zahl  $\lambda \neq 0$ .
- Addition von Vielfachen einer Zeile zu einer anderen.
- Vertauschen von 2 Zeilen.

Zurück zum Beispiel:

$$\left( \begin{array}{cc|c} 3 & \sqrt{2}-3 & \sqrt{18}-6 \\ -2 & 1 & 1 \end{array} \right) \quad "2" \rightarrow 3 \cdot "2" + 2 \cdot "1"$$

$$\left( \begin{array}{cc|c} 3 & \sqrt{2}-3 & \sqrt{18}-6 \\ 0 & 2\sqrt{2}-3 & 2\sqrt{18}-9 \end{array} \right)$$

Man erinnere sich: Wie wurde die obige Matrix erstellt? Also:

Die 2. Zeile sagt jetzt:

11.4.23 (3)

$$0 \cdot x_1 + (2\sqrt{2} - 3) \cdot x_2 = 2\sqrt{18} - 9$$

Also:

$$x_2 = \frac{2\sqrt{18} - 9}{2\sqrt{2} - 3} = \frac{2 \cdot (3 \cdot \sqrt{2}) - 9}{2\sqrt{2} - 3} = 3$$

In die 1. Zeile eingesetzt:

$$3 \cdot x_1 + (\sqrt{2} - 3) \cdot x_2 = \sqrt{18} - 6$$

$$3 \cdot x_1 + (\sqrt{2} - 3) \cdot 3 = 3\sqrt{2} - 6$$

$$x_1 + \sqrt{2} - 3 = \sqrt{2} - 2$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 3$$

$$:3$$

$$-\sqrt{2} + 3$$

Lösungsmenge  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

(der Vektor  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  mit den Komponenten

$x_1 = 1$  und  $x_2 = 3$ .)

Das war jetzt umständlich.

Wichtig ist, dass man etwas allgemeiner auf diese Art immer alle Lösungen finden kann.

## Bsp 2, Leontief-Modell

11.2.23 (4)

(aus Sydsaeter & Hammonds, §15.1)

Betrachte eine Volkswirtschaft mit folgenden Daten:

|               |         |          |                           |
|---------------|---------|----------|---------------------------|
| 1 T Fisch     | braucht | $\alpha$ | Fischer boote             |
| 1 T Holz      | braucht | $\beta$  | T Fisch (zur Verpflegung) |
| 1 Fischerboot | "       | $\gamma$ | T Holz (Ersatz & Wartung) |

Externe Nachfrage  $d_1$  T Fisch und  $d_2$  T Holz.  
( $\alpha, \beta, \gamma, d_1, d_2 > 0$ ).

Ansatz:  $x_1$  = Anzahl T Fisch  
 $x_2$  = Anzahl T Holz  
 $x_3$  = Anzahl Boote

Gleichungen:

$$x_1 = \beta x_2 + d_1 \quad (\text{mit dem Fisch müssen die Holzfäller verpflegt und die Nachfrage gedeckt werden.})$$

$$x_2 = \gamma x_3 + d_2 \quad (\text{analog})$$

$$x_3 = \alpha x_1$$

In Matrixschreibweise:

11.4.23 (5)

$$\begin{pmatrix} 1 & -\beta & 0 \\ 0 & 1 & -\gamma \\ -\alpha & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -\beta & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & -\gamma & d_2 \\ -\alpha & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -\beta & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & -\gamma & d_2 \\ 0 & -\alpha\beta & 1 & \alpha d_1 \end{array} \right)$$

"3"  $\rightarrow$  "3" +  $\alpha$  · "1"

"1. Spalte"

$$\rightsquigarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -\beta & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & -\gamma & d_2 \\ 0 & 0 & 1-\alpha\beta\gamma & \alpha d_1 + \alpha\beta d_2 \end{array} \right)$$

"3"  $\rightarrow$  "3" +  $\alpha\beta$  "2"

"Zeilenstufenform".

Ablezen der Lösung:

3. Zeile:  $(1-\alpha\beta\gamma) \cdot x_3 = \alpha d_1 + \alpha\beta d_2$

also  $x_3 = \frac{\alpha d_1 + \alpha\beta d_2}{(1-\alpha\beta\gamma)}$  (falls  $1-\alpha\beta\gamma \neq 0$ )

11.4.23 (6)

2. Zeile:

$$x_2 - \gamma x_3 = d_2 \quad \text{also}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= d_2 + \gamma \frac{\alpha d_1 + \alpha \beta d_2}{1 - \alpha \beta \gamma} = \frac{d_2 - \alpha \beta \gamma d_2 + \alpha \gamma d_1 + \alpha \beta \gamma d_2}{1 - \alpha \beta \gamma} \\ &= \frac{d_2 + \alpha \gamma d_1}{1 - \alpha \beta \gamma}. \end{aligned}$$

Und die 1. Zeile:

$$x_1 - \beta x_2 = d_1 \quad \text{also}$$

$$x_1 = d_1 + \beta x_2 = d_1 + \frac{\beta d_2 + \alpha \beta \gamma d_1}{1 - \alpha \beta \gamma} = \frac{d_1 + \beta d_2}{1 - \alpha \beta \gamma}.$$

Lösungsmenge:  $\left\{ \frac{1}{1 - \alpha \beta \gamma} \begin{pmatrix} d_1 + \beta d_2 \\ d_2 + \alpha \gamma d_1 \\ \alpha d_1 + \alpha \beta d_2 \end{pmatrix} \right\}$



Wir haben hier schon eine Regel benutzt, die nachher noch allgemeiner angegeben werden soll:

Wenn wir einen Vektor  $\begin{pmatrix} d_1 + \beta d_2 \\ d_2 + \alpha \gamma d_1 \\ \alpha d_1 + \alpha \beta d_2 \end{pmatrix}$  mit

11.4.23 (7)

einer reellen Zahl  $\frac{1}{1-\alpha\beta\gamma}$  multiplizieren,

so multiplizieren wir jede Komponente mit dieser Zahl,

⚠ Wenn der Bedarf  $\begin{matrix} \alpha > 0 \\ \beta > 0 \\ \gamma > 0 \end{matrix}$  so groß

ist, dass  $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma > 1$  gilt, dann hat die Lösung  $x$  negative Komponenten (weil die Nachfrage  $d_1 > 0, d_2 > 0$  positiv ist). Die Volkswirtschaft ist zu ineffektiv und kann keine externe Nachfrage decken. (Für  $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 1$  gibt es keine Lösung.) Damit es eine Lösung gibt muss  $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma < 1$  gelten.

⚠ Die 3. Komponente von  $x$  muss ganzzahlig sein da es sich um die Anzahl Fischerboote handelt. Für "fast alle" Nachfragen  $d_1 > 0, d_2 > 0$  kommt oben keine ganze Zahl raus. Man müsste dann z.B. mehr produzieren als gebraucht wird (oder man würde den Bedarf nicht decken).

## 2.1 RECHENREGELN

- $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  :  $A+B$  komponentenweise  
( $A$  und  $B$  müssen dieselben Dimensionen haben!)
- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ :  $\lambda \cdot A$  : "jeder Eintrag von  $A$  wird mit  $\lambda$  multipliziert."
- $-A = (-1) \cdot A$  und  $0 = 0 \cdot A$ .  $\leftarrow$  Dimensionen von  $A$   
Vektoren aus  $\mathbb{R}^m$  können auch als  $m \times 1$ -Matrizen in  $\mathbb{R}^{m \times 1}$  aufgefasst werden, sodass die Regeln entsprechend auch für Vektoren gelten.
- Assoziativgesetz der Addition für  
 $A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  :  $(A+B)+C = A+(B+C)$
- Kommutativgesetz der Addition für  
 $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  :  $A+B = B+A$
- $A+0 = A$
- $A+(-A) = 0$  (die Null-Matrix)
- $(\alpha+\beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$
- $\alpha \cdot (A+B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$