

BM03, 3. Vorlesung

①

Für 2 Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times q}$

kann das Produkt $A \cdot B$ gebildet werden,
(sofern eben die Zahl der Spalten von A und
die Zahl der Zeilen von B übereinstimmen)

in dem man die rechte Matrix " B " als
Zusammensetzung von q Vektoren in $\mathbb{R}^n$ auffasst:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \dots & & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \vdots \\ b_{n2} \end{matrix}} & \dots & \boxed{\begin{matrix} b_{1q} \\ b_{2q} \\ \vdots \\ b_{nq} \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

A $b^{(1)}$ $b^{(2)}$ $b^{(q)}$

$$= \begin{pmatrix} Ab^{(1)} & Ab^{(2)} & \dots & Ab^{(q)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \\ \uparrow j \end{matrix}$$

$1 \leq i \leq m$
 $1 \leq j \leq q$

$\in \mathbb{R}^{m \times q}$. (um die Summenschreibweise in Erinnerung zu rufen)

Beispiel

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 8 & 1 \cdot 9 + 2 \cdot 0 \\ 3 \cdot 7 + 4 \cdot 8 & 3 \cdot 9 + 4 \cdot 0 \\ 5 \cdot 7 + 6 \cdot 8 & 5 \cdot 9 + 6 \cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 23 & 9 \\ 53 & 27 \\ 83 & 45 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$$

aber $\begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ ist nicht definiert.

3.1 Rechenregeln

Kein Kommutativgesetz der Multiplikation,

$AB \neq BA$ in aller Regel (s.o.!!)

Falls die folgenden Produkte auf einer der beiden Seiten (links oder rechts) definiert sind, so gilt:

$$(AB)C = A(BC)$$

Assoziativgesetz

$$A(B+C) = AB + AC$$

$$(A+B)C = AC + BC$$

} Distributivgesetze

"Spielerei"

"axiomatische Vorgehensweise"

③

$$(A+B)(A+B) = ?$$

nur die obigen Regeln anwenden:

$$\begin{aligned} &= (A+B) \cdot A + (A+B) \cdot B \\ &= A \cdot A + B \cdot A + A \cdot B + B \cdot B. \end{aligned}$$

Matrixpotenzen für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: $A^p = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{p\text{-mal}}$

Durch eine ähnliche Spielerei mit dem Assoziativgesetz erkennt man, dass die Reihenfolge wie A^p gebildet wird egal ist und dass

$$A^p \cdot A^q = A^{p+q} = A^q \cdot A^p \text{ für } p, q \in \mathbb{N}.$$

Bsp: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{100} = ?$

Die Einheitsmatrix $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$

Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist

(4)

$$A \cdot I_n = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot 1 + 0 + \dots + 0 & a_{11} \cdot 0 + a_{12} \cdot 1 + 0 \dots \\ a_{21} \cdot 1 & \\ \vdots & \\ a_{m1} \cdot 1 + 0 + \dots + 0 & a_{m1} \cdot 0 + a_{m2} \cdot 1 + 0 \dots \end{pmatrix}$$
$$= A$$

und $I_m \cdot A = A$.

Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ schreiben wir auch $A^0 = I_n$.
(so wie für reelle Zahlen x stets gilt $x^0 = 1$).

Bsp: Für gegebenes $p \in \mathbb{R}$ berechne

$$\underbrace{(1 \ 2 \ 3)}_{\text{Zeilenvektor}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}}_{\text{Spaltenvektor}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix}}_{\text{oder } 2 \times 1\text{-Matrix}}$$
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 7p \\ 8p \\ 9p \end{pmatrix}}$$

⑤

$$(1 \ 2 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 7p \\ 8p \\ 9p \end{pmatrix} = (7+16+27)p = 50p$$

Bsp:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Bsp:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die transponierte Matrix (Syd. Hamm. §15.5)

Die Hauptdiagonale einer Matrix verläuft von links oben nach rechts unten:

Bsp

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Die Einheitsmatrix ist eine "Diagonalmatrix", die nur die Einträge "1" hat mit Ausnahme von "1"-en auf der Hauptdiagonalen.

$$\text{Zu } A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

⑥

$$\text{ist } A^T = (a_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq m}} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

die transponierte Matrix. Sie entsteht durch

Spiegelung an der Hauptdiagonalen.

Gelegentlich (z.B. in Sylvaeter & H.) wird anstelle von A^T auch A' geschrieben.

"Offensichtliche" Regeln:

$$(A^T)^T = A, \quad (A+B)^T = A^T + B^T, \quad (\alpha A)^T = \alpha A^T.$$

Durch Ausrechnen der Einträge auf beiden Seiten kann man auch nach folgende wichtige Regel prüfen:

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T.$$

(Häufige) Konvention:

Matrizen: Großbuchstaben wie A, B, C

Vektoren: Kleinbuchstaben wie a, b, x, y

Skalare (reelle Zahlen): griechische Buchstaben wie α, β, λ .

3.2 Die Gauß-Elimination

⑦

Durch die zulässigen Zeilenoperationen der letzten Stunde (Vertauschen, Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \neq 0$, Addition von einer Zeile zu einer anderen) kann eine (erweiterte) Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ immer auf folgende Zeilenstufenform gebracht werden:

$$\left(\begin{array}{ccccccc} 0 & \dots & 0 & \textcircled{*} & * & \dots & \dots \\ 0 & & 0 & \dots & 0 & \textcircled{*} & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & & & & 0 & \textcircled{*} & \dots \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & & & & & & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} k \\ \left. \begin{array}{l} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right\} m-k \end{array}$$

wobei die Einträge $\textcircled{*}$ ungleich Null und die Einträge $*$ ganz beliebig sind. Die orange markierten Stufen haben immer die "Höhe" 1 und die Länge $n_j \geq 1$ (für $j \geq 1$) mit $n_0 + n_1 + \dots + n_k = n$.

(Oft ist $n_0 = 0$ und $n_1 = \dots = n_k = 1$.)

⑧

Das Gauß'sche Eliminationsverfahren

erzeugt diese Stufenform spaltenweise aber durch zulässige Zeilenoperationen:

- Entweder ist die 1. Spalte komplett "0" (dann gehe zur nächsten Spalte) oder durch Vertauschen von Zeilen kann erreicht werden, dass "oben links" ein Element $\neq 0$ steht.

Nun zieht man geeignete Vielfache der 1. Zeile jeweils von den Zeilen 2, 3, ..., m ab sodass die 1. Spalte überall "0"-Einträge hat außer an der obersten Stelle. Danach wird die 1. Zeile nicht mehr angerührt. Die 1. Spalte behält somit die gewünschte Form!

- Durch Manipulation der Zeilen 2, 3, ..., m kann nun analog die 2. Spalte auf die gewünschte Form gebracht werden (siehe letzte Stunde) usw.

Bsp:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

An der Tafel:

- Darstellung von linearen Abb. durch $x \mapsto A \cdot x$

9

Hintereinanderausführung von linearen Abb. durch Matrix - Matrix - Multiplikation.

- Die zulässigen Zeilenoperationen in der Gauß-Elimination können durch Multiplikation von Links mit Elementarmatrizen umgesetzt werden:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \\ \leftarrow j \end{matrix}$$

↑ ↑
i j

Vertauschen von Zeile i und Zeile j .

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

Multiplikation von Zeile i mit λ .

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow i \\ \leftarrow j \end{matrix}$$

↑
i

Addition des α -fachen der Zeile i zu Zeile j .

(Für $n=2$ an der Tafel vorgerechnet.)