

II Determinanten & Inverse Matrizen

Wiederholung: Berechnung von $A \cdot x$,
Hintereinanderausführung von Lin. Abb.,
Elementarmatrizen der Gauß-Elimination

Beispiel:

Für welche fest gewählten $t \in \mathbb{R}$ hat das
nachfolgende lineare Gleichungssystem eine Lösung?

$$\begin{array}{rclcl} 2x_1 & - & 4x_2 & + & tx_3 & = & 1 \\ tx_1 & - & 2tx_2 & + & x_3 & = & \sqrt{1/2} \\ & & x_2 & - & t^2x_3 & = & 3 \end{array}$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & t & 1 \\ t & -2t & 1 & \sqrt{1/2} \\ 0 & 1 & -t^2 & 3 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \text{II} \rightarrow \text{II} - \frac{t}{2} \text{I} \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & t & 1 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{t^2}{2} & \sqrt{1/2} - \frac{t}{2} \\ 0 & 1 & -t^2 & 3 \end{array} \right)$$

(2)

$$\text{II} \Leftrightarrow \text{III} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & t & 1 \\ 0 & 1 & -t^2 & 3 \\ 0 & 0 & 1-\frac{t^2}{2} & -\sqrt{\frac{1}{2}}-\frac{t}{2} \end{array} \right)$$

und wann hat dieses System keine Lösung?

Die letzte Zeile sagt:

$$\left(1 - \frac{t^2}{2}\right) x_3 = -\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{t}{2}$$

Was ist wenn $1 - \frac{t^2}{2} = 0$ ist?

Für welche t ist $1 - \frac{t^2}{2} = 0$?

Wie sieht dann jeweils die rechte Seite aus?

Wie ist das mit x_1 und x_2 ?

Also?

- Allgemein anhand der Zeilenstufenform:
Wann hat $Ax = b$ für jedes b eine Lösung?
Wann hat $Ax = b$ für jedes b genau eine Lösung?

- Quadratische Funktionen: ③
 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $\gamma \in \mathbb{R}$ fest gegeben:

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = x^T A x + b^T x + \gamma.$$

Berechnung von f ?

Ersetzen von A durch $\tilde{A} := \frac{1}{2}(A + A^T)$?

(was ist $\tilde{A}^T$?)

- Der Term $b^T x$ heißt auch

"Skalarprodukt" oder "Inneres Produkt"

Von b und x .

Andere Schreibweisen:

$$b^T x = \langle b, x \rangle = \underbrace{b \cdot x}$$

Skalarprodukt, H.

⚠ $a \cdot b \cdot c$ "geht nicht"

$$(a^T b) c \in \mathbb{R}^n \quad (= \mathbb{R}^{n \times 1})$$

$$(a^T b) c^T = a^T (b c^T) \in \mathbb{R}^{1 \times n} \quad (\text{Zeilenvektor})$$

An der Tafel:

(4)

Darstellung von Vektoren in $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$)

Addition von Vektoren

Euklidische Länge von Vektoren (Pythagoras)

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$$

Der Winkel α zwischen a und $b \in \mathbb{R}^n$

$$a^T b = \|a\|_2 \cdot \|b\|_2 \cdot \cos(\alpha).$$

Rechter Winkel, falls $a^T b = 0$.

- Eine Gerade in $\mathbb{R}^n$ hat die Form

$$G = \{a + t b \mid t \in \mathbb{R}\}$$

für feste $a, b \in \mathbb{R}^n$

- Eine Hyperebene in $\mathbb{R}^n$ hat die Form

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = \beta\}$$

für feste $a \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}$.

5

In $\mathbb{R}^2$ stimmen Geraden und Hyperebenen überein.

Tafelbild für $\mathbb{R}^3$

weitere Darstellungen von G, H in $\mathbb{R}^3$.

Die Determinante einer
quadratischen Matrix

ii) Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

Dann ist $\text{Det}(A) = |A| = ad - bc$

die Determinante von A .

- Falls $\text{Det}(A) \neq 0$ ist so ist die Lösung von $A \cdot x = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ gegeben durch

$$x = \frac{1}{\text{Det}(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

- Falls $\text{Det}(A) = 0$ ist so hat ⑥
das System $A \cdot x = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ im Allg.
keine Lösung!

Probe (für $\text{Det}(A) \neq 0$):

$$\begin{aligned} A \cdot x &= \frac{1}{\text{Det}(A)} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dp - bq \\ -cp + aq \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\text{Det}(A)} \cdot \begin{pmatrix} adp - \underline{abq} - bcp + \underline{baq} \\ \underline{cdp} - cbq - \underline{dcp} + daq \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\text{Det}(A)} \begin{pmatrix} (ad - bc) p \\ (ad - bc) q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Setze $\tilde{A} := \frac{1}{\text{Det}(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ die Matrix von oben.

Dann gilt $Ax = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ sofern $x = \tilde{A} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$.

Also $A \cdot \tilde{A} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$

$$A \cdot \tilde{A} = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{"Inverse"}$$