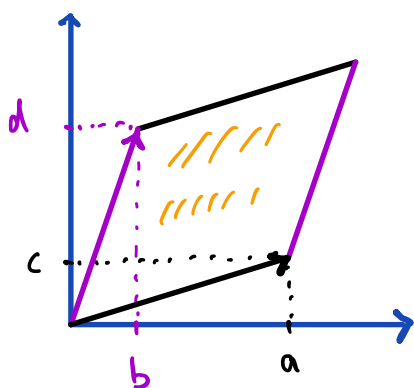


Bisher: §15 Sylvaeter, Hammonds

Jetzt: §16.1-4

- Determinante von $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: $ad - bc$.
- Löse $Ax = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$: $x = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$.
- Betrachte die Spalten (oder die Zeilen) von A :



Fläche = $|\det(A)|$

1. Spalte

2. Spalte

(Das kann auf 3×3 oder $n \times n$ verallgemeinert werden.)

- Sei nun $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Regel von Sarrus:

$\det(A)$:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \vdots & a_{11} & a_{12} & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \vdots & a_{21} & a_{22} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \vdots & a_{31} & a_{32} & \end{array}$$

(Note: In the original image, green arrows point from the first column to the second and third columns, and red arrows point from the second and third columns back to the first column, illustrating the Sarrus rule for a 3x3 matrix.)



4

$$\begin{aligned} \det(A) = & a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} \\ & - a_{31} a_{22} a_{13} - a_{32} a_{23} a_{11} - a_{33} a_{21} a_{12} \end{aligned}$$

Hier - und auch für größere n - kann $\det(A)$ benutzt werden um mit der sogenannten Cramerschen Regel das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ zu lösen, sofern $\det(A) \neq 0$. Das wird aber so kompliziert, dass das Gleichungssystem auf andere Art meist einfacher gelöst werden kann.

- Sei nun $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (quadratisch !)
An der Tafel:

Entwicklung von $\det(A)$ nach Laplace.

- Regeln:
 - $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
 - $\det(A) = \det(A^T)$
- Multiplikation einer Zeile (Spalte) von A mit λ :
" der Determinante mit λ

(Multiplikation von A mit λ ?)

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

- Vertauschen von 2 Zeilen von A : ⑤
 " des Vorzeichens der Determinante
- Addieren eines Vielfachen von einer Zeile zu einer anderen: **Determinante bleibt gleich!**

Die letzten 3 Regeln folgen aus der ersten, wenn man die Gauß'schen Elementarmatrizen anschaut,

z.B.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Det} = \lambda} \cdot A$$

Allgemeiner gilt für eine (untere) Dreiecksmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & * & & a_{nn} \end{pmatrix} :$$

$$\text{Det}(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn} = \prod_{j=1}^n a_{jj}$$

(Das gilt wegen $\text{Det}(A) = \text{Det}(A^T)$ auch für obere Dreiecksmatrizen.)