

6. Vorl. BM03

①

Für eine 2×2 -Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ haben wir gesehen,

dass die Lösung von $A \cdot x = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ gegeben ist durch

$$x = \underbrace{\frac{1}{\det(A)}}_{=: \tilde{A}} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}, \quad \text{falls } \det(A) = ad - bc \neq 0.$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \tilde{A} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \text{ ist die Lösung von } A \cdot x = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$

$$\text{Also } \underline{\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}} = A \cdot x = A \cdot (\tilde{A} \cdot \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}) = \underline{(A \cdot \tilde{A})} \cdot \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \text{ für bel. } \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

Assoziativgesetz

Aus $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = (A \cdot \tilde{A}) \cdot \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ für beliebige $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ folgt dass

$A \cdot \tilde{A} = I_2$ die Einheitsmatrix ist.

Man schreibt dann auch $\tilde{A} = A^{-1}$, die inverse Matrix von A .

$$\text{Potenzgesetz: } I = A^0 = A^{1-1} = A^1 \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A^1$$

hier darf vertauscht werden

Für die Berechnung von A^{-1} im allgemeinen Fall $n \geq 2$ nutzt man, dass Zeilenoperationen als Multiplikationen von links mit Elementarmatrizen interpretiert werden

können und wendet dieselben Zeilenoperationen 2 gleichzeitig auf die Einheitsmatrix an. Dabei bringt man A durch Zeilenoperationen zunächst auf Zeilenstufenform und dann durch weitere Zeilenoperationen auf die Form I_n .

Bsp. $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$(A | I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \text{II} \rightarrow \text{II} - \frac{2}{3}\text{I} \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \text{Zeilenstufenform}$$

$$\begin{array}{l} \text{I} \rightarrow \frac{1}{3}\text{I} \\ \text{II} \rightarrow -\frac{1}{8}\text{II} \\ \longrightarrow \\ \text{III} \rightarrow \frac{1}{3}\text{III} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \right) \quad \text{Diagonale "1"}$$

$$\begin{array}{l} \text{I} \rightarrow \text{I} - 2\text{II} \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \right) \quad \text{fertig.}$$

③

Oben wurde A von links mit Elementarmatrizen multipliziert. Bezeichnet man das Produkt dieser *in derselben Reihenfolge ausmultiplizierten* Elementarmatrizen mit B , so gilt wegen des Assoziativgesetzes $B \cdot A = I$.

Also ist $B = A^{-1}$. Im hinteren Teil (*den letzten 3 spalten*) stand zu Beginn I . Da mit dem hinteren Teil genau dieselben Zeilenoperationen durchgeführt wurden wie mit dem vorderen Teil (*der zu Beginn die Matrix A war*) steht im hinteren Teil $B \cdot I = B$.

$$\text{Also: } \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

(Dies war ein einfaches Beispiel, oft sind mehr Rechenschritte nötig.)

6.1 Regel Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- A^{-1} existiert $\iff \det(A) \neq 0$
(das gilt in allen Dimensionen $n \in \mathbb{N}$).
- A^{-1} existiert $\iff$ Die Zeilenstufenform von A hat keine Nullzeile

(4)

- A^{-1} existiert $\Leftrightarrow$ Das Gleichungssystem $Ax = b$ ist für alle b lösbar
- A^{-1} existiert $\Leftrightarrow$ Das Gleichungssystem $Ax = b$ ist für alle b **eindeutig** lösbar
- A^{-1} existiert $\Leftrightarrow$ Das Gleichungssystem $Ax = 0$ ist **eindeutig** lösbar. (Dann ist $x=0$ die **einzige Lösung**.)

Beispiel 1

Für welche festen $t \in \mathbb{R}$ hat das folgende Gleichungssystem eine Lösung? / eine eindeutige Lösung?

$$\begin{pmatrix} 6 & 8 & 4 \\ 6 & 8+t & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 8 & 4 & 16 \\ 6 & 8+t & 4 & 16 \\ 3 & 4 & 6 & 12 \end{array} \right) \xrightarrow[\text{III} \rightarrow \text{III} - \frac{1}{2}\text{I}]{\text{II} \rightarrow \text{II} - \text{I}} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 8 & 4 & 16 \\ 0 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array} \right)$$

Zeilenstufenform für $t \neq 0$

Nullzeile für $t = 0$

Die Lösung existiert und ist eindeutig ⑤
für $t \neq 0$ (nach obiger Regel)

Die letzte Zeile: $4x_3 = 4$ also $x_3 = 1$

Die 2. Zeile: $t x_2 = 0$

- wenn $t = 0$ so ist x_2 beliebig wählbar
- wenn $t \neq 0$ so muss $x_2 = 0$ gelten.

Die 1. Zeile: $6x_1 + 8x_2 + 4x_3 = 16$

$$\Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{6}(16 - 8x_2 - 4x_3) = \frac{1}{6}(16 - 8x_2 - \underbrace{4}_{=1})$$

$$= 2 - \frac{4}{3}x_2. \quad (x_2 \text{ von oben})$$

Das angegebene Gleichungssystem ist also immer lösbar, eindeutig nur für $t \neq 0$.

was ist wenn nun beliebige rechte Seiten

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ anstelle von $\begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 12 \end{pmatrix}$ betrachtet werden?

Beispiel 2

⑥

Für reelle Zahlen a, b, x und $c \neq 0$ gilt

$$a \cdot x = b \iff c \cdot a \cdot x = c \cdot b$$

Seien nun $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b, x \in \mathbb{R}^n$ und $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gegeben mit $C_{ij} \neq 0$ für alle i, j

Gilt dann auch

$$A \cdot x = b \iff C \cdot A \cdot x = C \cdot b \quad ? \quad \textcircled{*}$$

z.B.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

hat keine Lösung denn aus $\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \\ 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 1 \end{cases}$

folgt $x_1 = 0$ und $x_1 = 1$, ein Widerspruch.

Wähle nun $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ mit $C_{ij} \neq 0 \forall i, j$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Dies hat die Lösung $x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(Die Frage $\textcircled{*}$ ist also mit NEIN zu beantworten.)

⑦

Falls aber C invertierbar ist so gilt:

$$\underline{C \cdot A \cdot x = C \cdot b} \Rightarrow C^{-1} \cdot (C \cdot A \cdot x) = C^{-1} \cdot (C \cdot b)$$

Assoziativgesetz

$$\Rightarrow \underbrace{(C^{-1} \cdot C)}_{= I} \cdot A \cdot x = \underbrace{(C^{-1} \cdot C)}_{= I} \cdot b$$

$$\Rightarrow \underline{A \cdot x = b}$$

und umgekehrt,

$$\underline{A \cdot x = b} \Rightarrow \underline{C \cdot A \cdot x = C \cdot b}$$

$$\text{Also } C \cdot A \cdot x = C \cdot b \Leftrightarrow A \cdot x = b.$$

Die wesentliche Eigenschaft ist also nicht $C_{i,j} \neq 0 \quad \forall i,j$ sondern $\det(C) \neq 0$ (die Invertierbarkeit von C).

- Analog gilt für $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und invertierbares $C \in \mathbb{R}^{m \times m}$:

$$A = B \Leftrightarrow C \cdot A = C \cdot B.$$