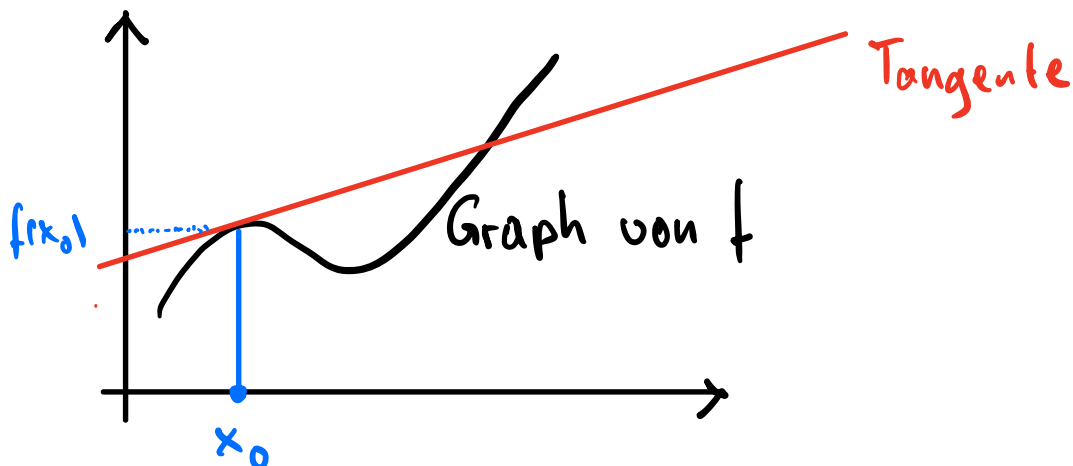


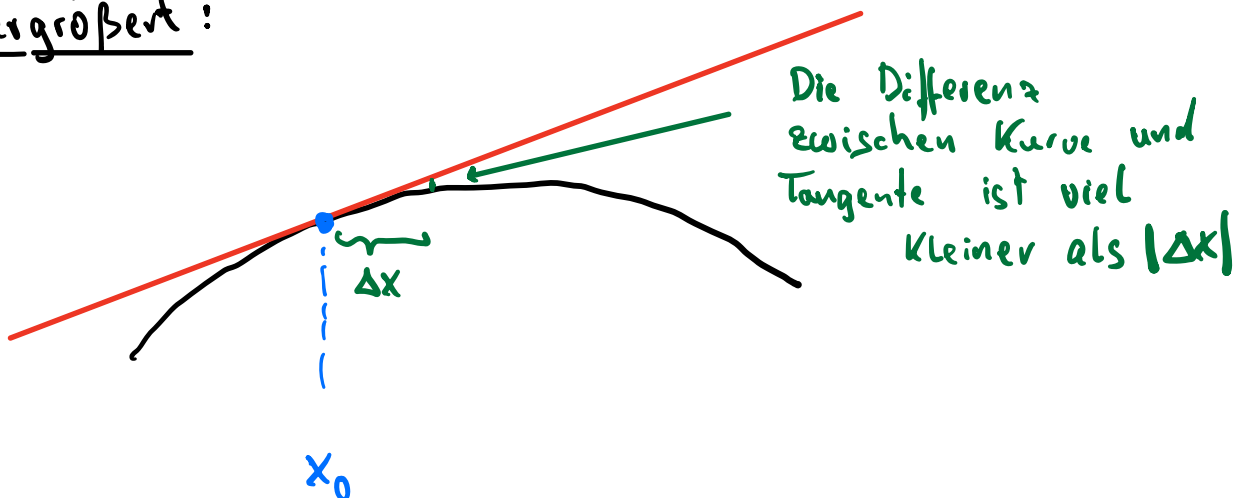
III Differentialrechnung mit mehreren Variablen

Wiederholung: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $x_0 \in \mathbb{R}$ fest, dann existiert $f'(x_0) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ (\Delta x \neq 0)}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

$f'(x_0)$ ist die Steigung der Tangente an (den Graph von) f im Punkt $(x_0, f(x_0))$



Vergrößert:



- Die charakteristische Eigenschaft der Ableitung 2
ist

Tangente an der Stelle $x_0 + \Delta x$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x}^{\text{Tangente an der Stelle } x_0 + \Delta x} - f(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} = 0.$$

Für kleine $|\Delta x|$ wird $f(x_0 + \Delta x)$ sehr gut durch die Tangente an der Stelle $x_0 + \Delta x$ approximiert.

7.1 Wichtige Regeln:

(immer nur falls die rechte Seite definiert ist.)

$$1) (\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0) \quad \text{Linearität } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ fest.}$$

$$2) (f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0) \quad \text{Produktregel}$$

Beweis an der Tafel

$$3) \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) g(x_0) - g'(x_0) f(x_0)}{g(x_0)^2} \quad \text{Quotientenregel}$$

$$4) (f \circ g)'(z_0) = \underbrace{f'(g(z_0))}_{\text{den Wert } x_0 = g(z_0) \text{ bei } f' \text{ eingesetzt}} g'(z_0) \quad \text{Kettenregel}$$

den Wert $x_0 = g(z_0)$ bei f' eingesetzt.

③

Hier ist $f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \text{ Hintereinanderausführung}$$

Bem. $f'(x_0)$ ist eine Zahl (die Steigung der Tangente)

Die Abbildung $x \mapsto f'(x)$ ist eine Funktion.

- Andere Schreibweise: $f'(x) = \frac{df}{dx}(x)$

"Die Ableitung von f an der Stelle x "

Ganz einfache Funktion: $f : x \mapsto x$

$$\Rightarrow f'(x) \equiv 1$$

ist immer

- Sei nun $g(x) : x \mapsto x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$

Beh: $g'(x) = n x^{n-1}$ (das wissen wir eigentlich schon)

- Die Beh. stimmt für $n=1$ weil $n \cdot x^{n-1} = 1 \cdot x^0 = 1$
wie oben für $f'(x)$ angegeben.

- Wenn die Beh. für n stimmt dann auch für $n+1$:
(vollständige Induktion)

(4)

Produktregel

$$\frac{d}{dx} (x^{n+1}) = \frac{d}{dx} (x^n \cdot x) = \underbrace{\frac{d}{dx} (x^n)}_{\text{Beh. für n: } n \cdot x^{n-1}} \cdot x + x^n \cdot \underbrace{\frac{d}{dx} (x)}_1$$

$$\underbrace{n \cdot x^{n-1} \cdot x}_{n \cdot x^n} + \underbrace{x^n}_{1 \cdot x^n}$$

$$= (n+1) x^n.$$

• Betrachte $h: x \mapsto e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

$$h'(x) = 0 + 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$= h(x).$$

⚠ Dass man diese unendliche Summe einfach einzeln ableiten kann muss man noch begründen, gilt hier aber.

Bsp: $f(x) \equiv e^{-x^2/2}$

"Glockenkurve"

$$f'(x) \equiv -x e^{-x^2/2}$$

nach Kettenregel.

Erweiterung auf $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

⑤

Bsp: Feste Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gegeben,

- $\hat{f}(z) := e^{az} + a^2 bc - \frac{z}{1+(a+b)^2} \quad \text{für } z \in \mathbb{R}$

$$\frac{d}{dz} \hat{f}(z) = ae^{az} + 0 - \frac{1}{1+(a+b)^2}$$

- Seien nun z, b, c fest gegeben und

$$\tilde{f}: a \mapsto e^{az} + a^2 bc - \frac{z}{1+(a+b)^2} \quad \text{für } a \in \mathbb{R}$$

genau wie oben, aber jetzt ist a die Variable

$$\frac{d}{da} \tilde{f}(a) = ze^{az} + 2abc + \frac{2(a+b)z}{(1+(a+b)^2)^2}$$

- Betrachte nun $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right) = e^{x_2 x_1} + x_2^2 x_3 x_4 - \frac{x_1}{1+(x_2+x_3)^2}$$

genau wie $\hat{f}$ und $\tilde{f}$, nur mit

⑥

$$x_1 \stackrel{!}{=} z$$

$$x_2 \stackrel{!}{=} a$$

$$x_3 = b$$

$$x_4 = c$$

Die Ableitung von f nach x_1 nennen wir dann partielle Ableitung (da nur nach einem Teil der Variablen $x_1, \dots, x_4$ abgeleitet wurde) und

Schreiben
$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x) = x_2 e^{x_1 x_2} - \frac{1}{1 + (x_2 + x_3)^2}$$

genau wie oben bei $\hat{f}$.

Analog

$$\frac{\partial}{\partial x_2} f(x) = x_1 e^{x_1 x_2} + 2 x_2 x_3 x_4 + \frac{2(x_2 + x_3)x_1}{(1 + (x_2 + x_3)^2)^2}$$

genau wie oben bei $\tilde{f}$.

Die 4 partiellen Ableitungen fassen wir in einem Zeilenvektor (1×4 -Matrix) zusammen:

$$Df(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x), \frac{\partial}{\partial x_2} f(x), \frac{\partial}{\partial x_3} f(x), \frac{\partial}{\partial x_4} f(x) \right).$$

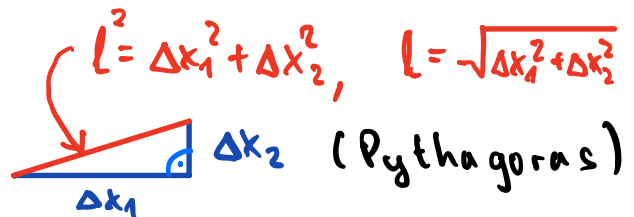
⑦

Für einen Vektor $\Delta x \in \mathbb{R}^n$ ist seine (Euklidische) Länge gegeben durch

$$\|\Delta x\| = \|\Delta x\|_2 = \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_n^2}.$$

$$n=1: \quad |\Delta x|$$

$$n=2: \quad \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2}$$



$n=3$: erneut Pythagoras
⋮

Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und sei $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

(Für $n=2$ ist der Graph von f eine "Berg- und Tal-Landschaft" über der (x_1, x_2) -Ebene.)

Wenn $Df(x^0)$ wie oben existiert und die charakteristische Gleichung (s.o.)

$$\lim_{\|\Delta x\| \rightarrow 0} \frac{f(x^0) + Df(x^0) \Delta x - f(x^0 + \Delta x)}{\|\Delta x\|} = 0 \quad \text{erfüllt}$$

so heißt f in x^0 total differenzierbar. In diesem Fall ist der Spaltenvektor $\nabla f(x^0) := (Df(x^0))^T$ die Richtung des steilsten Anstiegs in x^0 .