

BM03, 8. Vorl. (Ableitung von $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$) ①

Satz 8.1 Wenn die partiellen Ableitungen $x \mapsto \frac{\partial}{\partial x_i} f(x)$ einer Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ existieren und stetige Funktionen (in der Nähe von $x^{(0)}$) sind, so ist f in $x^{(0)}$ total differenzierbar, d.h. die charakteristische Gleichung

$$\lim_{\|\Delta x\|_2 \rightarrow 0} \left| \frac{f(x^{(0)} + \Delta x) - (f(x^{(0)}) + Df(x^{(0)}) \Delta x)}{\|\Delta x\|_2} \right| = 0$$

ist erfüllt. #

- $\|\Delta x\|_2 = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2}$ die Euklidische Norm von Δx . (Egal auf welchen "Wegen" sich Δx dem $\vec{0}$ annähert, der obige Betrag muss immer näher gegen 0 gehen. Zur Verdeutlichung wird hier der 0-Vektor als $\vec{0}$ dargestellt.)

- $Df(x^{(0)}) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x^{(0)}), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f(x^{(0)}) \right)$ eine Matrix mit einer Zeile (Zeilenvektor).

Sei $x := x^{(0)} + \Delta x$.

②

Die Funktion $t: x \mapsto f(x^{(0)}) + Df(x^{(0)}) \underbrace{(x - x^{(0)})}_{\Delta x}$ ist eine "affin-) lineare" Funktion,

$$\begin{aligned} & t(\alpha x^{(1)} + \beta x^{(2)}) \\ &= f(x^{(0)}) + Df(x^{(0)})((\alpha x^{(1)} + \beta x^{(2)}) - x^{(0)}) \\ &= \underbrace{f(x^{(0)}) - Df(x^{(0)})x^{(0)}}_{\text{fest}} + \underbrace{\alpha Df(x^{(0)})x^{(1)} + \beta Df(x^{(0)})x^{(2)}}_{\text{linear}} \end{aligned}$$

Charakteristische Gleichung:

"Die Funktion t approximiert die Funktion f für kleine $\|\Delta x\|_2 = \|x - x^{(0)}\|_2$ sehr sehr gut."

- Die Umkehrung des obigen Satzes gilt nicht
z.B. $n=1: \quad x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

- Wie sieht die Ableitung aus?

- charakteristische Gleichung ($n=1$)

③

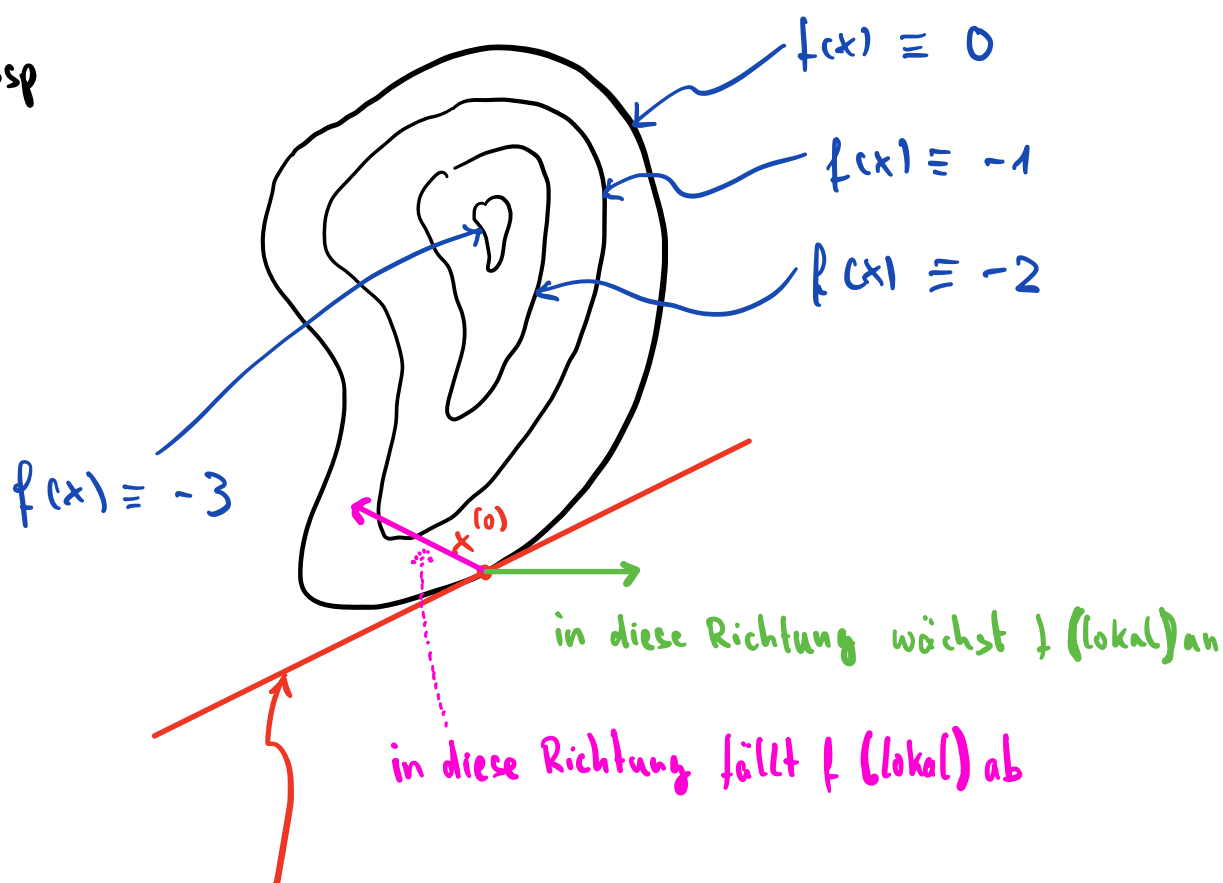
ü || $n > 1: \quad x \mapsto x_1^2 \sin\left(\frac{1}{x_1}\right)$

- Wie sieht die Ableitung aus?

- charakteristische Gleichung ($n > 1$)

Veranschaulichung (Höhenlinien)

Bsp



$$t(x) := f(x^{(0)}) + Df(x^{(0)})(x - x^{(0)}) \equiv f(x^{(0)})$$

($f \equiv \text{konst.}$ auf der Höhenlinie)

(Nahe bei $x^{(0)}$: $t \approx f$. $t \equiv \text{Konst.}$ auf der roten Linie)

④

Die Menge $H := \{x \mid \nabla f(x^{(0)}) (x - x^{(0)}) = 0\}$ ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, die durch eine lineare Gleichung beschrieben wird, eine Hyperebene.
(Gerade in $\mathbb{R}^2$, Ebene in $\mathbb{R}^3$,
(n-1)-dimensionaler affiner Teilraum in $\mathbb{R}^n$).

Die charakteristische Gleichung

$$t(x) \approx f(x) \quad \text{für kleine } \underbrace{\|x - x^{(0)}\|_2}_{\Delta x}$$

besagt, dass H tangential zur Höhenlinie liegt.

(In $\mathbb{R}^3$ ist die Menge $\{x \mid f(x) \equiv \text{konstant}\}$ eine 2-dimensionale Fläche, in $\mathbb{R}^n$ ist sie eine (n-1)-dimensionale Fläche.)

Betrachte $\nabla f(x^{(0)}) := \nabla f(x^{(0)})^T$ (Spaltenvektor).

Für $x^{(1)}, x^{(2)} \in H$ gilt

(5)

$$Df(x^{(0)})x^{(1)} = Df(x^{(0)})x^{(2)}$$

$$Df(x^{(0)})x^{(1)} = Df(x^{(0)})x^{(2)}$$

$$0 = Df(x^{(0)}) (x^{(1)} - x^{(2)})$$

$$= \nabla f(x^{(0)})^T (x^{(1)} - x^{(2)})$$

" $\nabla f(x^{(0)})$ steht senkrecht zu den Richtungen
 $x^{(1)} - x^{(2)}$ die innerhalb von H verlaufen

und damit auch senkrecht auf den Höhenlinien
 $(n=2)$ bzw. "Höhenflächen" $(n \geq 3)$ von f ."

Die Richtung des steilsten Anstiegs

Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in $x^{(0)}$ (total) differenzierbar
 und $\nabla f(x^{(0)}) \neq 0$.

Für kleine $\varepsilon > 0$ finde das Δx mit $\|\Delta x\|_2 = \varepsilon$,
 für das $f(x^{(0)} + \Delta x)$ maximal wird.

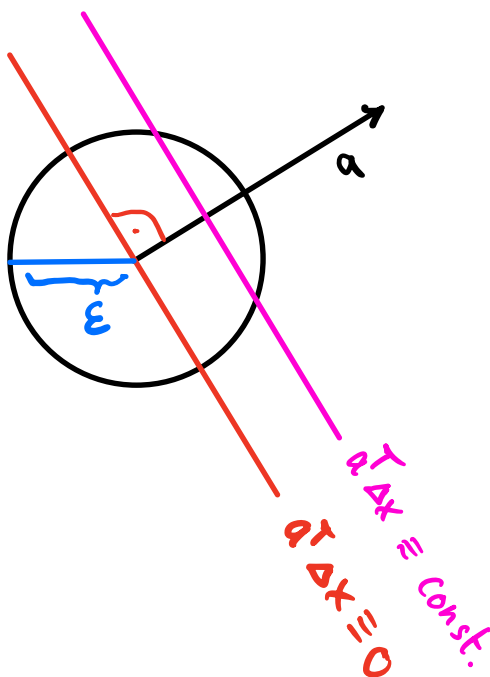
$$\approx \underbrace{f(x^{(0)}) + Df(x^{(0)}) \Delta x}_{\text{für kleine } \|\Delta x\|_2} = f(x^{(0)} + \Delta x)$$

⑥

"Maximiere $Df(x^{(0)}) \Delta x$ wobei $\|\Delta x\|_2 = \varepsilon$ sei."

Sei $a := \nabla f(x^{(0)}) = Df(x^{(0)})^T$

maximiere $a^T \Delta x$ mit $\|\Delta x\|_2 = \varepsilon$



Lösung: $\Delta x = \varepsilon \cdot \frac{a}{\|a\|_2}$

$$\left(\left\| \frac{a}{\|a\|_2} \right\|_2 = \left\| \frac{1}{\|a\|_2} a \right\|_2 = \frac{1}{\|a\|_2} \|a\|_2 = 1 \right)$$