

IV Lokale Minimalstellen

(Sydsaeter, Hammond, §14)

Falls $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in $\bar{x}$ differenzierbar ist, so wird f lokal sehr gut durch die (affin-)lineare Funktion $t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ approximiert mit $t(\bar{x}+h) := a^T h + \beta$, d.h. $f(\bar{x}+h) \approx t(\bar{x}+h)$ für kleine $\|h\|_2$.

Dabei ist $a = \nabla f(\bar{x})$ und $\beta = f(\bar{x})$.

$$\frac{f(\bar{x}+h) - (f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T h)}{\|h\|_2} \xrightarrow{\|h\|_2 \rightarrow 0} 0$$

Wie sehen solche affin-linearen Funktionen aus?

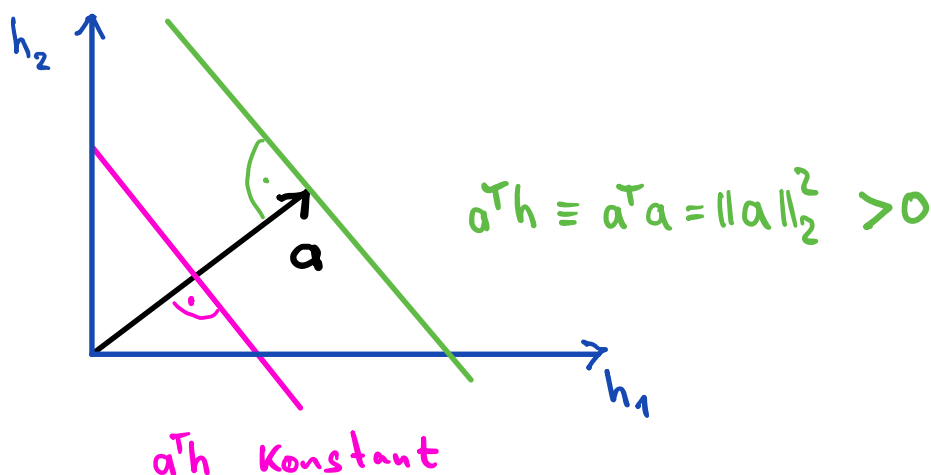
i) a steht senkrecht auf $\tilde{h}$, falls $a^T \tilde{h} = 0$
(4. Vorl. Seite 4)

Für solche $\tilde{h}$ gilt also

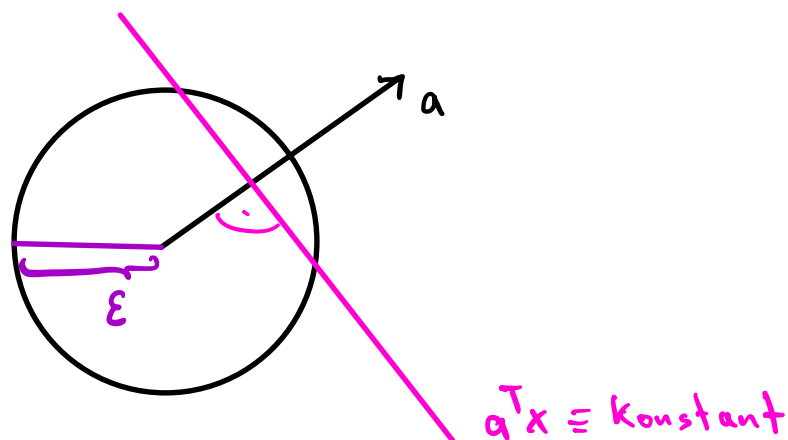
$$t(h + \tilde{h}) = a^T(h + \tilde{h}) + \beta = a^T h + \underbrace{a^T \tilde{h}}_{=0} + \beta = a^T h + \beta = t(h)$$

t ist entlang aller solcher Richtungen konstant.

(2)



Für x mit $\|x\|_2 = \varepsilon > 0$ wird $a^T x$ maximal wenn $x = \frac{\varepsilon}{\|a\|_2} \cdot a$



Der "Senkrechttraum zu a " $H := \{\tilde{h} \mid a^T \tilde{h} = 0\}$ ist ein "Unterraum"

$$(\tilde{h} \in H \Rightarrow \lambda \tilde{h} \in H \quad \forall \lambda \in \mathbb{R})$$

$$\tilde{h}, \hat{h} \in H \Rightarrow \lambda \tilde{h} + \mu \hat{h} \in H \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Definition 9.1

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$. Dann heißt $\bar{x}$ innerer Punkt 3 von D , wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt so dass

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - \bar{x}\|_2 \leq \varepsilon\} \subset D \text{ gilt}$$

$U_\varepsilon(\bar{x})$: ε -Umgebung von $\bar{x}$

D heißt offen, wenn D nur innere Punkte enthält. "Der Rand von D gehört nicht mehr mit zu D ."

Bsp: $n=1$:

$D = \mathbb{R}$ ist offen "völlig offensichtlich"

$D = (0, \infty)$ ist offen

(für $\bar{x} \in D$ wähle $\varepsilon = \frac{\bar{x}}{2} > 0 \Rightarrow U_\varepsilon(\bar{x}) = [\frac{\bar{x}}{2}, \frac{3}{2}\bar{x}] \subset D$)

allgemeiner: offene Intervalle

$n \geq 2$: $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 < 1\}$

Definition 9.2: Für $D \subset \mathbb{R}^n$ ist $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ein Randpunkt von D , wenn es in jeder ε -Umgebung von $\bar{x}$ Punkte aus D und Punkte nicht aus D gibt.

(4)

Bsp: Zu $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 < 1\}$ ist

$\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Randpunkt, aber $\bar{x} \notin D$.

Wähle $x^k = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{k} \\ 0 \end{pmatrix} \in D$ für $k \geq 1$.

$$\|x^k - \bar{x}\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{k} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} -\frac{1}{k} \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{k}\right)^2 + 0^2} = \frac{1}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Wenn jeder Randpunkt von D zu D gehört,
so heißt D abgeschlossen.

(Abgeschlossene Intervalle in $\mathbb{R}^1$).

Das Komplement einer Menge $D \subset \mathbb{R}^n$ ist

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x \notin D\}.$$

Das Komplement einer offenen Menge ist
stets abgeschlossen und umgekehrt.

⑤

Die leere Menge und (der ganze) $\mathbb{R}^n$
Sind die einzigen Mengen die sowohl offen als
auch abgeschlossen sind.

Definition 9.3 :

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit einer Menge $D \subset \mathbb{R}^n$.

Ein Punkt $\bar{x} \in D$ heißt lokale Minimalstelle von

f , wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $f(x) \geq f(\bar{x})$

für alle $x \in U_\varepsilon(\bar{x}) \cap D$.

Analog lokale Maximalstelle.

Wegen $f(x) \longrightarrow \min$

$\Leftrightarrow -f(x) \longrightarrow \max$

werden nachfolgend nur Minimierungsprobleme
betrachtet. Maximierungsprobleme können stets auf
Minimierungsprobleme zurückgeführt werden.

⑥

Satz 9.4

Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $\bar{x}$ eine lokale Minimalstelle von f . Dann gilt $\nabla f(\bar{x}) = 0$.

Wenn $\nabla f(\bar{x}) \neq 0$ und $h := -\delta \nabla f(\bar{x})$ mit $\delta > 0$ gesetzt wird, so gilt

$$\frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}) - Df(\bar{x})h}{\|h\|_2} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 \quad \left(< \frac{1}{2} \|\nabla f(\bar{x})\|_2 \right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}) - \underbrace{Df(\bar{x})h}_{- \delta Df(\bar{x}) \nabla f(\bar{x})} &< \frac{1}{2} \|h\|_2 \|\nabla f(\bar{x})\| = \frac{\delta}{2} \|\nabla f(\bar{x})\|_2^2 \\ &- \delta Df(\bar{x}) \nabla f(\bar{x}) = -\delta \|\nabla f(\bar{x})\|^2 \end{aligned}$$

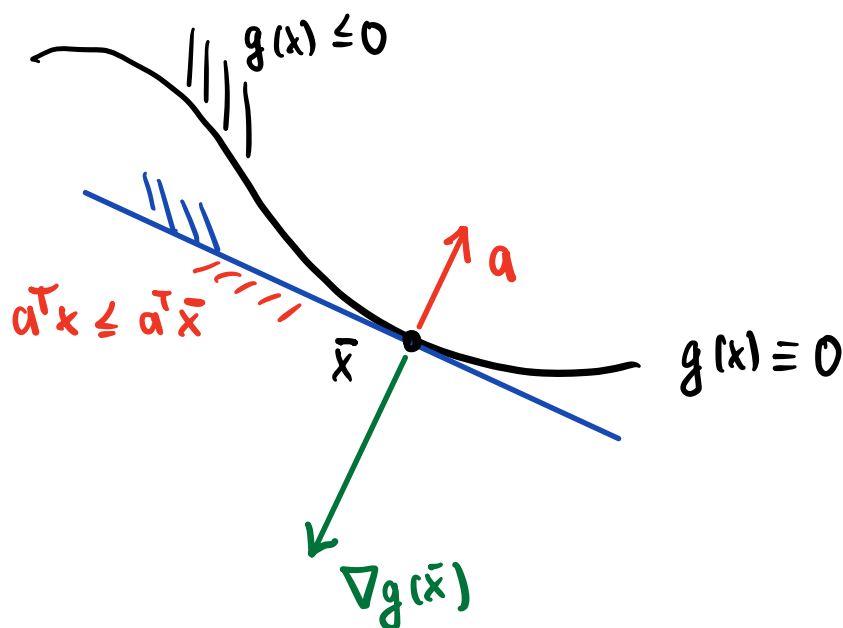
$$\Rightarrow f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}) < -\frac{\delta}{2} \|\nabla f(\bar{x})\|_2^2 < 0 \quad \text{für kleine } \delta > 0.$$

Also ist $\bar{x}$ keine lokale Minimalstelle.

Betrachte folgendes Problem:

⑦

- minimiere $\underbrace{a^T x}_{\equiv f(x)}$ wobei $g(x) \leq 0$ sei



Wo ausgehend von $\bar{x}$ der Wert $a^T x$ reduziert wird (roter Bereich) ist genau das Komplement des Bereichs, wo $f(x) \leq 0$ ist (blau schraffiert).

Es gibt eine Zahl $\lambda \geq 0$ "Lagrange-Multiplikator"

so dass $a = -\lambda \nabla g(\bar{x})$.

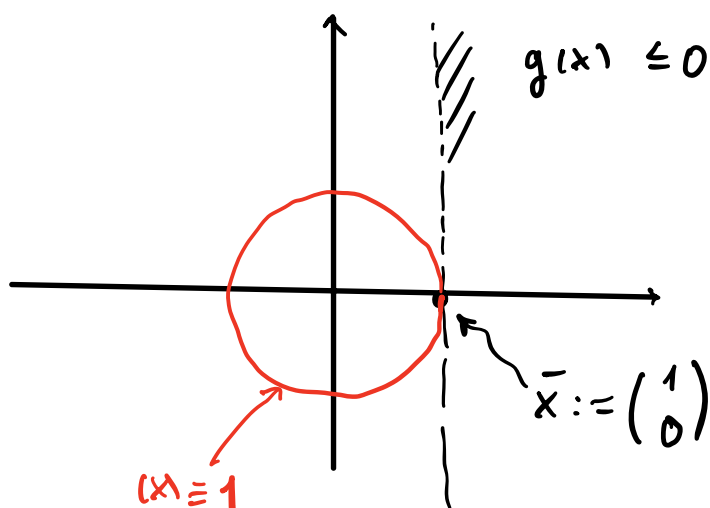
Dabei ist a der Gradient von $x \mapsto a^T x$.

$$a = \nabla f(\bar{x}).$$

Beispiel

(8)

1) minimiere $\underbrace{x_1^2 + x_2^2}_{\equiv f(x)} \quad | \quad \underbrace{1 - x_1}_{\equiv g(x)} \leq 0$



$$\nabla f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 2\bar{x}_1 \\ 2\bar{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla g(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit $\lambda := 2$ gilt $\nabla f(\bar{x}) = -\lambda \nabla g(\bar{x})$ wie oben

Seien $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.
Falls $\bar{x}$ eine lokale Minimalstelle ist von
minimiere $f(x)$ für x mit $g(x) \leq 0$ und falls
 $g(\bar{x}) = 0, \nabla g(\bar{x}) \neq 0$, so gibt es einen "Lagrange-
multiplikator" $\lambda \geq 0$ mit $\nabla f(\bar{x}) + \lambda \nabla g(\bar{x}) = 0$.

9

21 Betrachte nun das äquivalente Problem

$$\text{minimiere } x_1^2 + x_2^2 \quad | \quad \underbrace{(1-x_1)^3}_{\equiv \tilde{g}(x)} \leq 0$$

$$\text{Jetzt ist } \nabla \tilde{g}(x) = \begin{pmatrix} -3(1-x_1)^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{d.h. } \nabla \tilde{g}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ für obiges } \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Die Gleichung } \underbrace{\nabla f(\bar{x})}_{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}} = -\lambda \underbrace{\nabla \tilde{g}(\bar{x})}_{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

hat keine Lösung.

Die Beschreibung der "zulässigen Menge"

$\{x \mid \tilde{g}(x) \leq 0\}$ ist im Punkt $\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

"nicht regulär" (nächste Stunde)