

BM03, Beispiel 2 (10. Vorl. S.4)

①

$$\min \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{f_0(x)} \quad \text{wobei} \quad \underbrace{x_1^2 + x_2^2 - 1}_{f_1(x)} \leq 0$$

$p = 1$, (eine Ungleichung)

$m = p$ (keine Gleichungen)

$$f_0(x) = 2x_1 + x_2, \quad \nabla f_0(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_0(x) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} f_0(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f_1(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$$

Die Menge $S := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f_1(x) \leq 0\}$

ist abgeschlossen (weil f_1 stetig ist)

und beschränkt (weil $|x_1| \leq 1$ und $|x_2| \leq 1$ gelten müssen damit $f_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0$ gilt)

Also muss das Problem eine Lösung $\bar{x}$ haben.

②

Fallunterscheidung:

i)) $f_1(\bar{x}) < 0$

$$\Rightarrow I(\bar{x}) = \emptyset$$

$$(\text{und } I(\bar{x}) \cup \{p+1, \dots, m\} = \emptyset \text{ da } p=m)$$

Die Regularitätsbedingung

"Die $\nabla f_\ell(\bar{x})$ für $\ell \in I(\bar{x}) \cup \{p+1, \dots, m\}$
müssen linear unabhängig sein"

verlangt "gar nix" weil es keine
 $\ell \in I(\bar{x}) \cup \{p+1, \dots, m\}$ gibt, sie ist also
(trivial) erfüllt.

Wegen $\lambda_1 \cdot f_1(\bar{x}) = 0$ muss dann $\lambda_1 = 0$ sein.

$$\text{Also } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \nabla f_0(\bar{x}) + \underbrace{\lambda_1}_{=0} \nabla f_1(\bar{x}) = \nabla f_0(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

"Das geht nicht"

Also gibt es keinen KKT Punkt $\bar{x}$ mit
 $f_1(\bar{x}) < 0$.

ii) $f_1(\bar{x}) = 0$, d.h. $\bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 - 1 = 0$ (3)

Dann können $\bar{x}_1$ und $\bar{x}_2$ nicht beide null sein, d.h. $\nabla f_1(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 2\bar{x}_1 \\ 2\bar{x}_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Somit ist die Regularitätsbedingung erfüllt.

Also $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \nabla f_0(\bar{x}) + \lambda_1 \nabla f_1(\bar{x})$ mit $\lambda_1 \geq 0$.

(wegen $f_1(\bar{x}) = 0$ ist dann immer $\lambda_1 f_1(\bar{x}) = 0$.)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2\bar{x}_1 \\ 2\bar{x}_2 \end{pmatrix}$$

$$0 = f_1(\bar{x}) = \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 - 1 \Rightarrow \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 = 1$$

das ist für $\lambda_1 = 0$ nicht erfüllbar
wegen $\lambda_1 \geq 0$ muss also $\lambda_1 > 0$ sein.

$$-\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 2\bar{x}_1 \\ 2\bar{x}_2 \end{pmatrix} = 2\lambda_1 \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2\lambda_1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/2\lambda_1 \\ -1/2\lambda_1 \end{pmatrix}$$

Also: $1 = \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 = \left(\frac{-2}{2\lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2\lambda_1}\right)^2 = \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{4\lambda_1^2}$

④

$$= \frac{1}{\lambda_1^2} \left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{\lambda_1^2} \cdot \frac{5}{4}$$

Noch einmal zusammengefasst:

$$1 = \dots = \frac{1}{\lambda_1^2} \cdot \frac{5}{4}$$

mult. mit λ_1^2

$$\Rightarrow \lambda_1^2 = \frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \sqrt{\frac{5}{4}} \quad (\text{weil } \lambda_1 > 0)$$

In  auf S.3 unten eingesetzt:

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2\lambda_1} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \underbrace{\sqrt{\frac{4}{5}}}_{\sqrt{4}=2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der einzige KKT - Punkt ist $-\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Da es eine Lösung gibt und die Regularitätsbedingung immer erfüllt ist muss dieser die Lösung sein. Probe zu der Nebenbedingung:

$$f_1(\bar{x}) = \bar{x}_1^2 + \bar{x}_2^2 - 1 = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}} \cdot 2\right)^2 + \left(\frac{-1}{\sqrt{5}} \cdot 1\right)^2 - 1 = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} - 1 = 0. \#$$