Letzte Stunde:

(PSDP) $\min C \bullet X \mid \mathcal{A}(X) = b,\ X \succeq 0$ ("min" für "minimiere")

(DSDP) $\max b^T y \mid \mathcal{A}^*(y) + S = C,\ S \succeq 0$

Gleichheit, falls eines der beiden Probleme die Slater-Bed. erfüllt.

Beweis

Möge (PSDP) die Slater-Bed. erfüllen.

- Falls (PSDP) keinen endlichen Optimalwert besitzt, so hat (DSDP) aufgrund der schwachen Dualität keinen zulässigen Punkt $\Rightarrow$ inf von (PSDP) = sup (DSDP) = $-\infty$ ✓
- Möge also $\inf\{C \bullet X \mid \mathcal{A}(X) = b,\ X \succeq 0\} =: c^* > -\infty$ gelten und sei $\tilde{X} \succ 0$ mit $\mathcal{A}(\tilde{X}) = b$ (Slater).
  Zu zeigen: $\exists\, y^*, S^* \succeq 0$: $b^T y^* = c^*$ und $\mathcal{A}^*(y^*) + S^* = C$.

  Falls $\tilde{C} \in \ker(\mathcal{A})^\perp$, so ändert die Addition von $\tilde{C}$ zu C den Optimalwert von (PSDP) um $\langle \tilde{X}, \tilde{C} \rangle$ (weil X nur entlang von $\ker(\mathcal{A})$ variiert werden kann) genauso wie den von (DSDP) (weil $\ker(\mathcal{A})^\perp = \text{Bild}(\mathcal{A}^*)$, d.h. $\exists\, \Delta y$ mit $\mathcal{A}^*(\Delta y) = \tilde{C}$ und $b^T \Delta y = \langle \mathcal{A}(\tilde{X}), \Delta y \rangle = \langle \tilde{X}, \mathcal{A}^*(\Delta y) \rangle = \langle \tilde{X}, \tilde{C} \rangle = \text{const.}$)
- Wir können daher o.B.d.A. annehmen, dass $\underline{C \in \ker(\mathcal{A})}$.
  Sei ferner $C \neq 0$. (sonst trivial)
  Setze $\mathcal{M} := \{X \mid \mathcal{A}(X) = b,\ C \bullet X \leq c^*\} \neq \emptyset$.

  ($\mathcal{A}(\tilde{X} - \lambda C) = b \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$. Mit $\lambda \to \infty$ ist $\tilde{X} - \lambda C \in \mathcal{M}$)

- $\mathcal{M} \cap S^n_{++} = \emptyset$ (Gäbe es $\bar{X} \succ 0$ in $\mathcal{M}$ so wäre $\bar{X} - \varepsilon C \succ 0$ für kleine $\varepsilon > 0$ im Widerspruch zur Optimalität von c^*.)
(S^n_{++} die positiv definiten $n \times n$-Matrizen)

Nach Trennungssatz 7.2.3 existiert $W \in S^n \setminus \{0\}$ mit (endlich-dim Raum)

$$\sup_{X \in \mathcal{M}} W \bullet X \leq \inf_{S \in S^n_{++}} W \bullet S \in \{-\infty, 0\}$$

($\sup > -\infty$)

$\Rightarrow W \succeq 0$ (Fejer).

$\Rightarrow W \bullet \hat{X} \leq 0 \quad \forall \hat{X} \in \mathcal{M} = \tilde{X} + \ker(\mathcal{A}) \cap \{X \mid C \bullet X \leq c^*\}$

$\Rightarrow W \bullet X = 0 \quad \forall X \in \ker(\mathcal{A}) \cap \{X \mid C \bullet X = 0\}$

$\Rightarrow W \in (\ker(\mathcal{A}) \cap \{X \mid C \bullet X = 0\})^\perp = \ker(\mathcal{A})^\perp + \{\lambda C \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

($\ker(\mathcal{A})^\perp = \{\mathcal{A}^*(y)\}$)

Da mit W auch alle positiven Vielfachen von W obige Trennung erfüllen sei o.B.d.A: $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$.

wegen $W \succeq 0$, $W \neq 0$, $\tilde{X} \succ 0$ folgt $W \bullet \tilde{X} > 0$

(und $\mathcal{A}(\tilde{X}) = b$ nach Vor. an $\tilde{X}$.)

Setze $W = \lambda C - \mathcal{A}^*(\tilde{y})$ für ein $\tilde{y}$. (Minuszeichen will Kürlich)

i) $\lambda = -1$:

$W = -\mathcal{A}^*(\tilde{y}) - C$. Setze $\Delta X := C / \|C\|_F^2 \Rightarrow$

$\mathcal{A}(\Delta X) = 0$, $C \bullet \Delta X = 1$, mit $\hat{X} \in \mathcal{M}$ folgt $\hat{X} - \alpha \Delta X \in \mathcal{M}$ für $\alpha \geq 0$. $\Rightarrow$

$$0 \geq W \cdot (\hat{x} - \alpha \Delta x) = W \cdot \hat{x} - \alpha (-A^T(\tilde{y}) - C) \cdot \Delta x \qquad (3)$$

Def. von W ; $-A^T(\tilde{y}) - C = W$

$$= W \cdot \hat{x} + \alpha \xrightarrow{\alpha \to \infty} \infty \quad \lightning$$

$A^T(\tilde{y}) \cdot \Delta x = \tilde{y}^T A(\Delta x) = 0$, $C \cdot \Delta x = 1$

iii) $\lambda = 0$:

$0 < W \cdot \tilde{x} = -A^T(\tilde{y}) \cdot \tilde{x} = -\tilde{y}^T A(\tilde{x}) = -\tilde{y}^T b$, so dass für $x \in \mathcal{M}$ folgt: $0 \geq W \cdot x = -A^T(\tilde{y}) \cdot x = -\tilde{y}^T b > 0$ $\lightning$

Def. von W ; $A(x) = b$

So bleibt nur

iii) $\lambda = 1$ und

$W = C^T - A^T(\tilde{y}) \neq 0$.

Mit $0 \geq \sup_{x \in \mathcal{M}} W \cdot x = \sup \{ W \cdot x \mid A(x) = b,\ C \cdot x \leq c^* \}$

$$= \sup \{ (C^T - A^T(\tilde{y})) \cdot x \mid A(x) = b,\ C \cdot x \leq c^* \}$$

$= b^T \tilde{y}$ unabh. von x

$$= -b^T \tilde{y} + \sup \{ C \cdot x \mid A(x) = b,\ C \cdot x \leq c^* \}$$

$$= -b^T \tilde{y} + c^* \qquad (C \neq 0,\ C \in \ker(A)).$$

$\Rightarrow b^T \tilde{y} \geq c^* \Rightarrow \tilde{y}, W$ ist optimal für (DSDP) mit Zielfunktionswert c^*. #

schwache Dualität

Der Fall, dass (DSDP) strikt zul. ist mit endlichem Optimalwert lässt sich Umformungen auf obigen Fall zurückführen. (Wie bei linearen Programmen.)

Im "Normalfall" (der leider in einer Reihe praktischer Anwendungen nicht eintrifft) dass (PSDP) & (DSDP) beide die Slater-Bed. erfüllen, existiert also eine primal-duale Optimallösung und die erfüllt (und ist charakterisiert durch):

(16.1.1)

$$\begin{cases} \mathcal{A}(X) = b & X \succeq 0 \quad \text{m Gleichungen} \\ \mathcal{A}^*(y) + S = C & S \succeq 0 \quad \frac{n(n+1)}{2} \text{ "} \\ XS = 0 & \quad n^2 \text{ "} \end{cases}$$

Anzahl der Unbekannten:

X, S : $2 \cdot \frac{n(n+1)}{2}$ "zu wenige"!

y : m

(und die Ungleichungen sind auch noch zu berücksichtigen.)