Prof. F. Jarre
Institut für Mathematik
Heinrich Heine Universität Düsseldorf

15.4.2025

1. Übung zu den direkten Suchverfahren

1. Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ konvex, $a \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R}$,

$$D_1 := \{x \in D \mid a^T x \leq \beta\} \quad \text{und} \quad D_2 := \{x \in D \mid a^T x \geq \beta\}.$$

Seien $f_1 : D_1 \to \mathbb{R}$ und $f_2 : D_2 \to \mathbb{R}$ beide konvex und die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} f_1(x) & x \in D_1 \\ f_2(x) & x \in D \backslash D_1 \end{cases}$$

sei auf ganz D stetig und für $x \in D \cap \{x \mid a^T x = \beta\}$ differenzierbar. Man zeige, dass f konvex ist.

2. Für $x \in \mathbb{R}^2$ sei

$$f(x) := \begin{cases} 5\sqrt{9x_1^2 + 16x_2^2} & x_1 \geq |x_2|, \\ 9x_1 + 16|x_2| & 0 < x_1 < |x_2|, \\ 9x_1 + 16|x_2| - x_1^9 & x_1 \leq 0. \end{cases}$$

(a) Man zeige, dass f stetig ist.

(b) Man gebe die Stellen an, an denen f nicht differenzierbar ist.

(c) Man skizziere die Höhenlinien $f(x) \equiv 0$ und $f(x) \equiv 15$.

(d) Man zeige (mithilfe von Aufgabe 1), dass f konvex ist.
(Ohne Beweis kann genutzt werden, dass eine zweimal differenzierbare Funktion genau dann konvex ist, wenn die zweite Ableitung überall positiv semidefinit ist.)

(e) Man gebe die Minimalstelle von f an.

(f) Ausgehend vom Punkt $(16, 9)^T$ wende man zwei Schritte des Verfahrens des steilsten Abstiegs mit exakter line search auf die Funktion f an.

(g) Konvergiert das Verfahren des steilsten Abstiegs gegen die Minimalstelle von f?

Abgabe: Vor der Übung am 24.4.2025.