3. Übung zu den direkten Suchverfahren

Zur Vorbereitung des nächsten Abschnitts sollen lineare oder quadratische Funktionen durch gegebene Punkte gelegt werden, deren Minimalstellen innerhalb einer “Trust-Region-Kugel” dann für die Wahl eines weiteren Punktes genutzt wird.

1. Man gebe eine Methode an, um ein regelmäßiges Simplex mit Kantenlänge 1 um den Ursprung zu generieren.
2. Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Man zeige, dass es genau eine affin-lineare Funktion gibt, die mit f an den Ecken des obigen Simplex übereinstimmt.
3. Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben sowie paarweise verschiedene Punkte $x^1, \dots, x^m \in \mathbb{R}^n$. Man stelle ein lineares Gleichungssystem auf, um eine quadratische Funktion $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zu ermitteln, für die

$$q(x^i) = f(x^i) \quad 1 \leq i \leq m$$

gilt.

4. Man gebe (je nach Wahl der x^i ($1 \leq i \leq m$)) einfache obere und untere Schranken für m an, so dass das obige Gleichungssystem für jedes f lösbar ist.
5. Man gebe obere und untere Schranken für m an, so dass es bei geeigneter Festlegung der x^i für jedes f genau eine quadratische Funktion q gibt, die f an allen x^i interpoliert. Wie erhält man eine geeignete Festlegung?

Hinweis: Der Fall $n = 1$ lässt sich induktiv auf $n > 1$ übertragen. Dabei können gegebene Stützpunkte in $x^i \in \mathbb{R}^n$ zunächst mittels $x_{n+1}^i := 0$ in den $\mathbb{R}^{n+1}$ gehoben werden und dort durch weitere Punkte $e_l + e_{n+1}$ für $1 \leq l \leq n$ sowie $\pm e_{n+1}$ ergänzt werden.

Abgabe: 21. 5. 2024 vor der Übung.