Prof. F. Jarre
Institut für Mathematik
Heinrich Heine Universität Düsseldorf

10.6.2025

5. Übung zu den direkten Suchverfahren

1. Sei $f : I\!R^2 \to I\!R$ mit $f(x) := x_1^2 - 2x_2^2 - x_2 + x_2^4$.

   Für $c \in I\!R$ gebe man einen Radius $r > 0$ an, sodass $\|z\|_2 \le r$ gilt für alle z aus $\{x \mid f(x) \le c\}$.

   Man wende die Simplexmethode von Nelder und Mead auf die Funktion f an. Als Startsimplex sei das regelmäßige Simplex mit den Ecken $v^0 := (0,1)^T$, $v^1 := (0,-1)^T$ und $v^2 := (\sqrt{3},0)^T$ gegeben. Wie sehen die Iterierten v^k für $k \ge 3$ aus?

2. Sei T_k mit $T_k(x) := \cos(k \arccos(x))$ für $k \in I\!N_0$ und $x \in [-1,1]$ das k-te Tschebyscheffpolynom. Man gebe T_0, T_1 und unter Ausnutzung der Additionstheoreme auch T_2 explizit an. Man zeige induktiv

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x) \quad \text{für } k \ge 1,\ x \in [-1,1].$$

3. Für $x \in I\!R^n$ $(n \ge 2)$ und festes $\beta > 0$ sei im Folgenden stets

$$r_N(x) := \frac{1}{4}(x_1 - 1)^2 + \beta \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - 2x_i^2 + 1)^2$$

   die Nesterov'sche Modifikation der Rosenbrockfunktion. Man zeige, dass r_N nur einen einzigen kritischen Punkt besitzt, d.h. einen einzigen Punkt $\bar{x}$, in dem der Gradient Null ist, und dass dieser die globale Minimalstelle von r_N ist.

4. Setze $x^{(0)} := (-1,1,\dots,1)^T$. Man zeige, dass für $\beta \ge 14$ gilt: Falls $r_N(x) \le r_N(x^{(0)})$ und $x_i = 0$ für ein $i \le n-2$, so folgt $x_{i+1} < 0$ und $x_{i+2} > 0$.

5. Für $\beta \ge 14$ und $n \ge 4$ betrachte man einen stetigen, stückweise linearen Abstiegspfad $t \mapsto x(t)$ von $x(0) = x^{(0)}$ nach $x(1) = \bar{x}$. Wie viele Vorzeichenwechsel muss die erste Komponente $x_1(t)$ für $t \in [0,1]$ mindestens durchlaufen, und wie viele müssen x_2, x_3, x_4 mindestens durchlaufen?

Abgabe: 18. 6. 2025 vor der Übung.