6. Übung zu den direkten Suchverfahren

1. Sei $n \geq 2$ und $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ein Polynom 4. Grades mit

$$p(x) \equiv \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - 2x_i^2 + 1)^2.$$

Gilt dann $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} p(x) = \infty$?

Sei $\mathcal{M} := \{(x_1, x_n)^T \mid \exists x_2, \dots, x_{n-1} : p(x) = 0\}$.

Man zeige, dass für $(x_1, x_n)^T \in \mathcal{M}$ die Komponente x_n eine Funktion von x_1 ist, die genau 2^{n-1} Nullstellen besitzt.

Man zeige, dass die Einschränkung von p auf eine beliebige Gerade maximal 3 Nullstellen besitzt.

2. Man gebe ein (möglichst einfaches) Verfahren an, um die Minimalstelle einer konvexen quadratischen Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ anhand von drei Paaren $(x_i, f(x_i))$ zu berechnen.
3. Seien eine quadratische Matrix M und beliebige Matrizen U, V passender Dimension gegeben. Dann ist

$$(M + UV^T)^{-1} = M^{-1} - M^{-1}U(I + V^T M^{-1}U)^{-1}V^T M^{-1},$$

sofern $(I + V^T M^{-1}U)^{-1}$ existiert.

4. Sei eine quadratische diagonalisierbare Matrix M gegeben und $\| \cdot \|$ eine Matrix-Norm. Man zeige, dass der Spektralradius von M (d.h. der Betrag des betragsgrößten komplexen Eigenwerts von M) gegeben ist durch

$$\rho(M) = \lim_{k \rightarrow \infty} \|M^k\|^{1/k}.$$

Abgabe: 2. 7. 2025 vor der Übung.