Prof. F. Jarre
Institut für Mathematik
Heinrich Heine Universität Düsseldorf

9.7.2025

7. Übung zu den direkten Suchverfahren

1. Sei J ein Jordan-Block der Dimension ≥ 2 und $\| \, . \, \|$ eine Matrix-Norm. Man zeige, dass der Spektralradius von J gegeben ist durch
$$\rho(J) = \lim_{k \to \infty} \|J^k\|^{1/k}.$$

2. Sei G ein Graph mit $2n \geq 4$ Knoten, der aus einem Zykel der Länge n und einem Zykel der Länge $n+1$ besteht, welche genau einen Knoten gemeinsam haben. Sei A_G die (ungewichtete) Adjazenzmatrix zu G. Man gebe ein m an, sodass $A_G^m > 0$ (komponentenweise). Man zeige ferner $A_G^m \not> 0$ für $m = n^2 - n - 1$.

3. Man gebe einen Graphen mit Kantenlängen $L_{i,j} \geq 0$ an, der genau 4 Rundtouren besitzt und zwar so dass die Touren die Längen 0,1,2 und 3 besitzen. (Ein einfaches Beispiel lässt sich mit einem Graphen mit 6 Knoten bilden.)

4. Die obigen Touren seien mit x^1, x^2, x^3, x^4 bezeichnet und die Nummerierung sei dabei so, dass die Touren die Längen $f(x^1) = 0$, $f(x^2) = 3$, $f(x^3) = 1$, $f(x^4) = 2$ besitzen. Folgende Nachbartouren mögen jeweils von x^i aus erreichbar sein:
$$x^1 \to x^2, x^3, \quad x^2 \to x^1, x^3, \quad x^3 \to x^2, x^4, \quad x^4 \to x^2, x^3 \ .$$
Ausgehend von x^i werde in jedem Schritt eine der beiden Nachbartouren mit Wahrscheinlichkeit 1/2 ausgewählt. Wenn die Nachbartour kürzer ist wird x^i durch diese ersetzt und wenn die Nachbartour x^j länger ist, so werde der Wechsel mit Wahrscheinlichkeit $exp((f(x^i) - f(x^j))/T)$ vollzogen, wobei $T > 0$ ein fester Parameter ist. In Abhängigkeit von $\theta := exp(-1/T)$ gebe man die Matrix P an, bei der $P_{i,j}$ die Wahrscheinlichkeit ist, dass in einem Schritt ein gegebenes x^i $(1 \leq i \leq 4)$ zur Nachfolgetour x^j wechselt. ($x^j = x^i$ ist erlaubt.)

5. Man zeige, dass P^T den Eigenvektor
$$((2+\theta)\theta, (2+\theta)(1+\theta^2)\theta^2, (2+\theta^2)(1+\theta), (2+\theta^2)\theta)^T$$
besitzt.

6. Für $\theta = 0$ gebe man alle Eigenwerte und Eigenvektoren von P^T explizit an.

Abgabe: 16. 7. 2025 vor der Übung.