

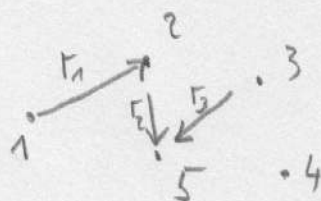
§ 9 Optimierung auf Graphen

40

Sei $G = (\{1, \dots, n\}, R)$ ein gerichteter Graph mit Knoten

$v \in V := \{1, \dots, n\}$ und Kanten $r \in R \subset V \times V$.

Bsp:



Die Adjazenzmatrix $A_G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist gegeben durch

$$(A_G)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j) \in R \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $A \in \{0,1\}^{n \times n}$ ist $G_A = (\{1, \dots, n\}, R = \{(i,j) \mid A_{ij} = 1\})$ der induzierte Graph. ($A = A_{G_A}$)

Sei $\pi: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ eine Permutation und Π die zugehörige Permutationsmatrix, $\Pi e_i = e_{\pi(i)}$ ($1 \leq i \leq n$) mit den kanonischen Einheitsvektoren e_i .

Bem: $\Pi^{-1} = \Pi^T$. $\neq$

Zu $G = (\{1, \dots, n\}, R)$ und $\tilde{G} = (\{1, \dots, n\}, \tilde{R})$ mit

$\tilde{R} = \{(\pi(i), \pi(j)) \mid (i,j) \in R\}$ gilt

$$(A_{\tilde{G}})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (\pi^{-1}(i), \pi^{-1}(j)) \in R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{falls } (A_G)_{\pi^{-1}(i), \pi^{-1}(j)} = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$e_i^T A_{\tilde{G}} e_j = 1 \Leftrightarrow e_{\pi^{-1}(i)}^T A_G e_{\pi^{-1}(j)} = 1 \Leftrightarrow (\Pi^T e_i)^T A_G (\Pi^T e_j) = 1$ folgt

$\Leftrightarrow e_i^T \Pi A_G \Pi^T e_j = 1$, d.h. $A_{\tilde{G}} = \Pi A_G \Pi^T$.

Sei $A \in \{0,1\}^{n \times n}$ und $G = G_A$, $G = (V, R)$.

Ein gerichteter Weg der Länge k von i nach j ist eine Folge $r_1 = (\alpha_1, w_1), \dots, r_k = (\alpha_k, w_k)$ von Kanten aus R mit Anfangsknoten $\alpha_1 = i$, Endknoten $w_k = j$ und $\alpha_{l+1} = w_l$ für $1 \leq l \leq k-1$.

Bem. Hier sind "schleifen" $\alpha_l = w_l$ "  " nicht verboten.

1. Beh. $(A^k)_{ij}$ gibt die Anzahl der verschiedenen gerichteten Wege der Länge k von i nach j an.

Bew. $k=1$: $\exists_{=1}$ Weg der Länge k von i nach $j \Leftrightarrow A_{ij} = 1$.

$k \rightarrow k+1$: # Wege der Länge $k+1$ von i nach j ist (nach IV.)

$$\sum_{e=1}^n (A^k)_{ie} \cdot A_{ej} = (A^{k+1})_{ij} \quad \neq$$

2. Beh. Wenn G stark zusammenhängend ist (d.h. jeder Knoten ist von jedem anderen Knoten aus entlang eines gerichteten Weges erreichbar) und $A_{ii} = 1$ für mind. ein i , so ist $A^k > 0$ für $k \geq 2n-2$.

$\uparrow$
komponentenweise

Bew. Sei z.B. $A_{nn} = 1$ und $i, j \in V$ bel. $\Rightarrow \exists$ Weg der Länge $\leq n-1$ von i nach n (wenn der Weg länger ist muss ein Knoten mind. 2-mal auftreten und das "Zwischenstück" kann gestrichen werden) und $\exists$ Weg der Länge $\leq n-1$ von n nach j und $\exists$ Weg bel. Länge von

n nach n (die Schleife mehr/ach durchlaufen!) (42)

$\Rightarrow$ für $k \geq 2n-2$ gibt es einen Weg der Länge k von i nach j ^{1. Bem} $\Rightarrow (A^k)_{ij} \geq 1$.

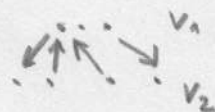
Bsp.:



Weg der Länge
 $2n-2+l$, $l \geq 0$
von 1 nach 1.

(Hier gibt es keinen Weg ungerader Länge $k \leq 2n-3$ von 1 nach 1.)

Bsp.: Für bipartite Graphen " $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$,
 $R \subset V_1 \times V_2 \cup V_2 \times V_1$ "



gibt es keine Wege ungerader Länge von V_1 nach V_1 .

3. Beh: G ist stark zusammenhängend $\Leftrightarrow$ ~~Permutation~~ Π

so dass $\Pi A \Pi^T = \begin{bmatrix} \square & 0 \\ \square & \square \end{bmatrix}$ eine (untere) Blocksdreiecks-
matrix ist, d.h. mit $\tilde{A} := \Pi A \Pi^T$ gilt $\tilde{A}_{ij} = 0$ für $i \leq l$
und $j \geq l+1$ (bei einem passendem l).

Bew: $\Rightarrow$ Seien i, j so dass j in G nicht von i aus
erreichbar ist. (Nummeriere } die Knoten so, dass $i=1$
Permutiere } und $2, \dots, l$ die von i aus erreichbaren Knoten
umfasst sowie $l+1, \dots, n$ die nicht " " .
Von keinem der Knoten $1, \dots, l$ kann es eine
Kante zu einem Knoten aus $l+1, \dots, n$ geben (!)
 $\Rightarrow \tilde{A}_{ij} = 0$ für $i \leq l$ und $j \geq l+1$. #

Wenn umgekehrt $\Pi A \Pi^T = \begin{array}{c|c} \text{ } & \text{ } \\ \hline \text{ } & \text{ } \end{array}$ ist,
 $\begin{array}{c} n \\ \hline e \quad n-e \end{array}$

so sind die Knoten $\pi(l+1, \dots, n)$ von den Knoten $\pi(1, \dots, l)$ aus nicht erreichbar. (Analog: obere Blockdreiecksmatrix) #

4. Beh: Sei $\tilde{A} \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ eine gewichtete Adjazenzmatrix mit Kantengewichten $\tilde{A}_{ij} > 0$ für $(i, j) \in E$.

Sei $\varepsilon := \min_{(i,j) \in E} \tilde{A}_{ij}$ und $M := \max_{(i,j) \in E} \tilde{A}_{ij}$ ($\varepsilon > 0, M < \infty$).

Dann ist $\frac{1}{\varepsilon} \tilde{A} \geq A$ wobei A die (ungewichtete) Adjazenzmatrix sei und $\frac{1}{M} \tilde{A} \leq A$.

Mit der Monotonie von $+$, $\cdot$ auf $\mathbb{R}_+$ folgt aus Beh. 1-3:

G ist stark zusammenhängend $\Leftrightarrow$

$\exists \Pi$ mit $\Pi \tilde{A} \Pi^T$ ist obere Blockdreiecksmatrix

Letztere Eigenschaft heißt: $\tilde{A}$ ist irreduzibel

Falls $\tilde{A}_{ii} > 0$ für mind. ein i so ex. $k_0 \leq 2n-2$ mit $\tilde{A}^k > 0 \forall k \geq k_0$. Matrizen $\tilde{A} \geq 0$ mit $\tilde{A}^k > 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$ heißen primitiv.

$\tilde{A} \geq 0, G_{\tilde{A}}$ stark zusammenhängend Dann gilt: (Übung)

$\{\tilde{A} \text{ ist primitiv}\} \Leftrightarrow \{\tilde{A}_{ii} > 0 \text{ für ein } i \text{ oder es gibt zwei gerichtete Zyklen der Längen } k_1 \text{ und } k_2 \text{ mit}$

$\text{ggT}(k_1, k_2) = 1\}$ Zykel: $(v_1, w_1), (v_2 = w_1, w_2), \dots, (v_k = w_{k-1}, w_k = v_1)$