

Bem 1 Für $\varepsilon = 0$, $n = 2$ und beschränkter Menge $N^0 := \{x \mid f(x) \leq f(x^3)\}$ wird d unendlich oft reduziert.

Bew:

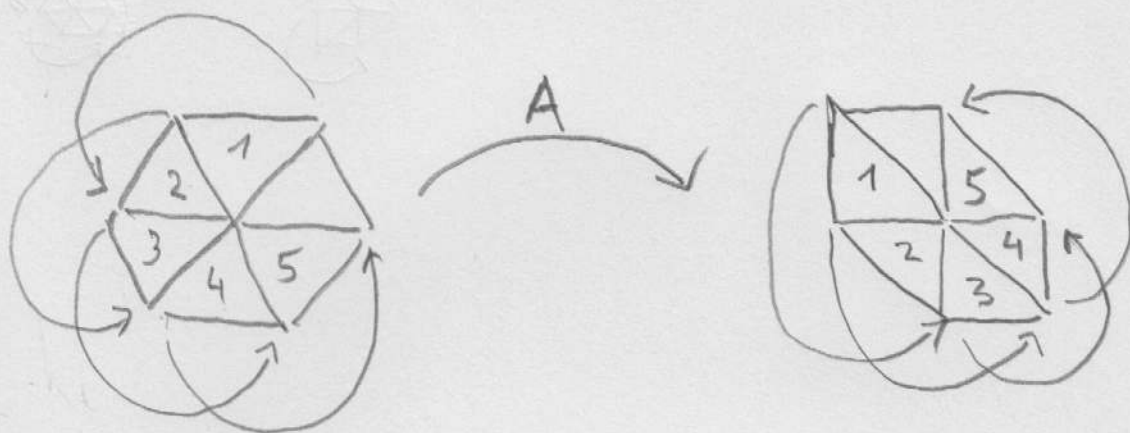
Für feste Kantenlänge d bilden die möglichen Simplices ein endliches Gitter über N^0 . (Bienenwaben in gleichseitige Dreiecke unterteilt.)

Da die Funktionswerte wegen $f(\hat{x}) < f(x^{n+1})$ streng monoton fallen wird d spätestens dann reduziert wenn f an allen Gitterpunkten in N^0 ausgewertet wurde. (Ähnlich wenn zu Beginn z.B. der Simplex mit den Ecken $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ gewählt wurde, die Ecken bleiben bei jeder Spiegelung ganzzahlig.)

Bem 2 Für $\varepsilon = 0$, $n = 3$ und beschränkter Menge $N^0 := \{x \mid f(x) \leq f(x^4)\}$ kann es (ohne weitere Annahmen an f) passieren, dass unendlich viele Simplices (Tetraeder) mit derselben Kantenlänge d generiert werden.

Bew: ill Induktiv lässt sich zeigen, dass die Methode die Iterierten $A^{-1}v^{(i)}$ erzeugt, wenn sie nicht auf f und $v^{(0)}, \dots, v^{(n)}$ angewendet wird sondern auf $\tilde{f}$ und $\tilde{v}^{(0)}, \dots, \tilde{v}^{(n)}$ mit $\tilde{f}(y) \equiv f(Ay)$ und $\tilde{v}^{(i)} := A^{-1}v^{(i)}$ ($0 \leq i \leq n$) mit einer invertierbaren Matrix A . (Die $\tilde{v}^{(i)}$ bilden dann kein regelmäßiges Simplex mehr.)

Bsp.



Wähle o.B.d.A. $v^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$, $v^{(3)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{12}} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \|v^{(i)} - v^{(j)}\| = 1 \quad 0 \leq i < j \leq 3.$

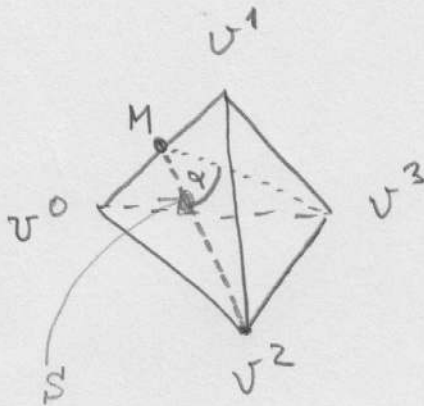
Setze $M := \frac{1}{2}(v^{(0)} + v^{(1)}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Der Winkel $\alpha(v^{(2)}, M, v^{(3)})$ ist durch

$$\cos(\alpha) = (v^{(2)} - M)^T (v^{(3)} - M) / (\|v^{(2)} - M\| \cdot \|v^{(3)} - M\|)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{0}{\sqrt{3}/4} \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{0}{\sqrt{1}/12} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} / (\sqrt{3}/4 \cdot \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{4}{9}}) = (1/4) / (3/4) = \frac{1}{3}$$

gegeben.



$$\alpha \approx 70,528779^\circ$$

Spiegelt man v^3 am Schwerpunkt S von v^0, v^1, v^2 , so entspricht dies einer Drehung um die Achse v^0, v^1 um einen Winkel α mit $\cos(\alpha) = \frac{1}{3}$.

Hält man stets v^0, v^1 fest und spiegelt stets um den "älteren" der beiden anderen Ecken, so entsprechen k Schritte einer Drehung um den Winkel $k\alpha$.

Bronstein ("de Moivre" $(\cos(x) + i \sin(x))^n = \dots$)

$$\begin{aligned} \cos(kx) &= \cos^k(x) - \binom{k}{2} \cos^{k-2}(x) \sin^2(x) + \binom{k}{4} \cos^{k-4}(x) \sin^4(x) - \binom{k}{6} \cos^{k-6}(x) \sin^6(x) + \dots \\ &= \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} (-1)^j \binom{k}{2j} \underbrace{\sin^{2j}(x)}_{(1-\cos^2(x))^j} \cos^{k-2j}(x) \end{aligned}$$

$$= \cos^k(x) \left(1 + \binom{k}{2} + \binom{k}{4} + \dots + \binom{k}{2 \lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \right) + \cos^{k-2}(x) \cdot \underbrace{\dots}_{\in \mathbb{R}} + \dots$$

$$\left\{ \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} = 2^n, \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} = 0 \right\} \xrightarrow{\quad} \underbrace{\quad}_{k-1} \xrightarrow{\quad} 2$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot \underbrace{2^{k-1}}_{\text{kein Vielfaches von 3}} + \left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} \cdot \text{"geradzahlig"} \notin \mathbb{Z}$$

Also sind die Simplices, die durch wiederholte Drehungen um x entstehen alle verschieden. Das Argument der "endlich vielen Fixpunkte" ist nicht anwendbar, auch wenn sich bei obigem Bsp keine stetige Funktion findet, die eine solche wiederholte Rotation ad infinitum bedingen würde.

• Modifizierung von Dennis & Torczon (1997):

Spiegelt alle Ecken an der "besten" Ecke: $v^{(i)} \rightarrow \hat{v}^{(i)} = 2v^{(0)} - v^{(i)}$,
 $1 \leq i \leq n$.

Wenn $\min_{i \geq 1} f(\hat{v}^i) > f(v^0)$ schrumpfe den Simplex, $v^i \rightarrow \frac{1}{2}(v^i + v^i)$
 $i \geq 1$.

Wenn nicht geschrumpft wird teste eine Verdopplung der Kantenlänge $\hat{v}^i \rightarrow -v^0 + 2\hat{v}^i$ für $i \geq 1$

Konvergenz: (Abbruch bei $\|v^0 - v^i\| \leq \delta$.)

o.B.d.A. alle Ecken zu Beginn ganzzahlig.

Induktiv folgt, dass die Ecken ganzzahlig bleiben, solange nicht geschrumpft wird. $\Rightarrow$ wenn $\{x \mid f(x) \leq f(v^0)\}$

beschränkt ist, muss der Simplex wiederholt geschrumpft werden. $\#$

Bei Abbruch gilt $f(v^0) \leq f(v^i)$ $1 \leq i \leq n$

$f(v^0) \leq f(\hat{v}^i)$ $1 \leq i \leq n$

$v^0 = \frac{1}{2}(v^i + \hat{v}^i)$ $1 \leq i \leq n$

Wie bei den Fixverfahren folgt $\|\nabla f(v^0)\| = O(\delta)$.