2) Eine Funktion, die ein solches Verhalten erzeugt:

Wähle $\Theta > 0$, $\Phi > 0$, $\tau > 1$ und

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} \Theta x_1^{\tau} + x_2^2 + x_2 & \text{für } x_1 \geq 0 \\ \Theta \Phi |x_1|^{\tau} + x_2^2 + x_2 & \text{für } x_1 < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow f$ ist stetig diff'bar (für $\tau > 2$ sogar 2-mal stetig diff'bar)

Auf den Halbräumen $x_1 \geq 0$ bzw $x_1 \leq 0$ ist f konvex

Nach Übungsblatt 1 ist f auf $\mathbb{R}^2$ konvex.

Sei $1 < \tau < \hat{\tau} := \dfrac{\ln|\lambda_2|}{\ln(\lambda_1)} \approx 3{,}0605\ldots$

Es gilt: $\underline{\lambda_1^{\hat{\tau}}} = \lambda_1^{\frac{\ln|\lambda_2|}{\ln(\lambda_1)}} = \left(\lambda_1^{\frac{1}{\ln(\lambda_1)}}\right)^{\ln|\lambda_2|}$

$= \left(\exp\left(\ln\left(\lambda_1^{\frac{1}{\ln(\lambda_1)}}\right)\right)\right)^{\ln|\lambda_2|} = \left(\exp\left(\frac{1}{\ln(\lambda_1)} \ln(\lambda_1)\right)\right)^{\ln|\lambda_2|}$

$= (\exp(1))^{\ln|\lambda_2|} = e^{\ln|\lambda_2|} = \underline{|\lambda_2|}$

$\Rightarrow \lambda_1^{\tau} > |\lambda_2|$ (da $\lambda_1 \in (0,1)$) $\circledast$

$\Rightarrow f(v^n) = f(\underbrace{\lambda_1^n}_{>0}, \lambda_2^n) = \Theta \lambda_1^{n\tau} + \lambda_2^{2n} + \lambda_2^n$

und $f(v^{n+1}) = \Theta \lambda_1^{(n+1)\tau} + \lambda_2^{2n+2} + \lambda_2^{n+1}$

reflektierter Punkt: $\hat{v}^n = \frac{1}{2} v^{n+1} + \left(-v^n + \frac{1}{2} v^{n+1}\right) = v^{n+1} - v^n$

$\uparrow$

der "vorletzte" Punkt wird reflektiert an $\frac{1}{2}(\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\bar{v}} + v^{n+1})$

Dabei ist $\hat{v}^n = v^{n+1} - v^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^{n+1} \\ \lambda_2^{n+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_1^n \\ \lambda_2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underbrace{-\lambda_1^n}_{<0} \underbrace{(1-\lambda_1)}_{>0} \\ -\lambda_2^n \underbrace{(1-\lambda_2)}_{>0} \end{pmatrix}$ ⊗⊗

$\Rightarrow f(\hat{v}^n) = \Theta\Phi \underbrace{\lambda_1^{n\tau}(1-\lambda_1)^\tau}_{|x_1|^\tau} + \lambda_2^{2n}(1-\lambda_2)^2 + \lambda_2^n(1-\lambda_2)$

α)) $f(v^{n+1}) - f(v^n) = \Theta\lambda_1^{n\tau}\underbrace{(\lambda_1^\tau - 1)}_{<0} + \underbrace{\lambda_2^{2n}}_{>0}\underbrace{(\lambda_2^2-1)}_{<0} + \lambda_2^n \underbrace{(\lambda_2 - 1)}_{<0} \overset{!}{<} 0$

wechselndes Vorzeichen

(damit v^n "als nächstes" gespiegelt wird.)

Wegen $\lambda_1^\tau > |\lambda_2|$ ist die Ungleichung erfüllt, falls

$\Theta(1-\lambda_1^\tau) > |\lambda_2 - 1|$ ⊗⊗⊗

β)) $f(v^{n+1}) - f(\bar{v}) > \Theta\lambda_1^{(n+1)\tau} + \lambda_2^{n+1} = \Theta(\lambda_1^\tau)^{n+1} + \lambda_2^{n+1} \overset{⊗}{>} 0$ für $\Theta \geq 1$.

γ)) $f(\hat{v}^n) \overset{!}{>} f(v^n)$

$\overset{⊗⊗}{\Leftrightarrow} \Theta\Phi(\underbrace{\lambda_1^n(1-\lambda_1)}_{|x_1|})^\tau + \underbrace{\lambda_2^{2n}(1-\lambda_2)^2}_{x_2^2} \underbrace{- \lambda_2^n(1-\lambda_2)}_{x_2} > \Theta \underbrace{\lambda_1^{n\tau}}_{x_1^\tau} + \underbrace{\lambda_2^{2n}}_{x_2^2} + \underbrace{\lambda_2^n}_{x_2}$

$\Leftrightarrow \Theta \underbrace{\lambda_1^{n\tau}}_{\overset{⊗}{>} |\lambda_2|^n}(\Phi(1-\lambda_1)^\tau - 1) > \underbrace{\lambda^{2n}}_{>0}\underbrace{(1-(1-\lambda_2)^2)}_{<0} + \lambda_2^n(1+(1-\lambda_2))$

Hinreichend: $\Theta(\Phi(1-\lambda_1)^\tau - 1) > 2 - \lambda_2$ ⊗⊗⊗⊗

Werte, die ⊗⊗⊗ und ⊗⊗⊗⊗ erfüllen:

$\tau = 2,\ \Theta = 6,\ \Phi = 60$ "gleichmäßig streng konvex"

$\tau = 3,\ \Theta = 6,\ \Phi = 400$ "2-mal stetig diff'bar & konvex".

Aber $\nabla f\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. #

Einschub:

Simplex mit Ecken $v^i = \frac{e_i}{\sqrt{2}}$ $(1 \le i \le n)$ und $v^{n+1} = -\beta e$

wobei $e_i = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)^T$ und $e = (1,\dots,1)^T$.

$$\Rightarrow \|v^i - v^j\|_2^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \text{für } 1 \le i < j \le n$$

$$\|v^i - v^{n+1}\|_2^2 = \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \beta\right)^2}_{\text{Komponente } i} + (n-1)\beta^2 \overset{!}{=} 1 \quad \text{für } i \le n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \sqrt{2}\beta + n\beta^2 = 1 \Rightarrow \beta^2 + \frac{\sqrt{2}}{n}\beta - \frac{1}{2n} = 0$$

$$\underbrace{\text{wähle positive Wurzel}}_{\Rightarrow} \quad \beta := -\frac{1}{\sqrt{2}n} + \sqrt{\frac{1}{2n^2} + \frac{1}{2n}} = \frac{1}{\sqrt{2}n}\left(-1 + \sqrt{1+n}\right) \quad \left(\text{ganz grob} \approx \frac{1}{\sqrt{2n}}\right)$$

Probe: $\|v^i - v^{n+1}\|_2^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{n}\left(-1 + \sqrt{1+n}\right)\right)\right)^2 + (n-1)\frac{1}{2n^2}\left(\underbrace{-1 + \sqrt{1+n}}_{=:\varrho}\right)^2$

$$\varrho^2 = 1 - 2\sqrt{1+n} + 1 + n = 2 + n - 2\sqrt{n+1} = \underline{n - 2\varrho}$$

$$\|v^i - v^{n+1}\|_2^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\varrho}{n}\right)^2 + \frac{n-1}{2n^2}\varrho^2 = \frac{1}{2} + \frac{\varrho}{n} + \frac{\varrho^2}{2n^2} + \frac{n-1}{2n^2}\varrho^2$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\varrho}{n} + \frac{n}{2n^2}\varrho^2 = \frac{1}{2} + \frac{\varrho}{n} + \frac{1}{2n}(\underline{n - 2\varrho}) = \frac{1}{2} + \frac{\varrho}{n} + \frac{1}{2} - \frac{\varrho}{n} = 1 \quad \#$$

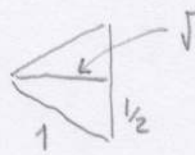
Dieser Simplex erfüllt: $\sum_{i=1}^{n} v^i + v^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}e - \beta e = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{\sqrt{n+1} - 1}{n}\right)}_{=:\mu} e$

Bilde $v^i \longrightarrow v^i - \frac{\mu e}{n+1}$ um einen Simplex mit Schwerpunkt 0 zu erhalten. #

Höhe des Simplex (mit Kantenlänge 1)

$$\Big\|\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} v^i}_{\text{Schwerpunkt } v^0 \ldots v^{n-1}} - \underbrace{v^n}_{\text{gegenüber liegende Ecke}}\Big\|_2 = \Big\|\frac{1}{\sqrt{2}\,n} e + \beta e\Big\|_2 = \|e\| \left(\frac{1}{\sqrt{2}\,n} + \frac{1}{\sqrt{2}\,n}(-1+\sqrt{n+1})\right)$$

$$= \sqrt{n}\left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2}\,n}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right).$$

($n=2$: 

, $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) = \sqrt{3/4}$).

Die {Gerade durch ein v^i und den Schwerpunkt geschnitten mit dem Simplex} hat die Länge $\sqrt{\frac{n+1}{2n}}$.
Der Schwerpunkt teilt diese Strecke im Verhältnis $1:n$ auf.

Auf S. 25[9] geschieht dies in Dimension $n-1$ sodass die Größe $\Theta(\delta)$ dort den exakten Wert $\delta \cdot \sqrt{\frac{n}{2(n-1)}} \cdot \frac{1}{n} = \frac{\delta}{\sqrt{2n(n-1)}}$ hat.

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{(n-1)+1} \qquad \left(\approx \frac{\delta}{\sqrt{2}\,n}\right)$$

[9] Konvergenz des Simplexverfahren von Spendley et al.

§6 Methoden der konjugierten Richtungen

Sei $A = A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pos. definit, $A \succ 0$.

Eigenwertzerlegung: $A = UDU^T$ mit $D = \begin{pmatrix} \ddots & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$ und $U^TU = UU^T = I$.

Sei $A^{1/2} := UD^{1/2}U^T \Rightarrow A^{1/2} \succ 0$ und $(A^{1/2})^2 = A$.

($A^{1/2}$ hängt nicht von der speziellen Wahl von U ab.)

<u>Def.</u> Richtung $d^1, \dots, d^k$ heißen A-konjugiert, falls

$$d^i \neq 0 \text{ für } 1 \le i \le k \text{ und } (d^i)^T A d^j = 0 \text{ für } i \neq j.$$

<u>Bem 1:</u> A konjugierte Richtungen sind linear unabhängig.

<u>Bew:</u> Sei $z := \sum_{i=1}^k \mu_i d^i \Rightarrow z^T A z = \left(\sum_{i=1}^k \mu_i d^i\right)^T A \left(\sum_{j=1}^k \mu_j d^j\right)$

$$= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \mu_i \mu_j (d^i)^T A d^j = \sum_{i=1}^k \mu_i^2 \underbrace{(d^i)^T A d^i}_{>0} > 0 \text{ falls } \mu \neq 0.$$

#

Sei $c \in \mathbb{R}^n$ und $A \succ 0$ und $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x) \equiv \frac{1}{2} x^T A x + c^T x$.

Gegeben $x, d \in \mathbb{R}^n$ finde $\alpha^* := \arg\min f(x + \alpha d)$:

$\ell(\alpha) := f(x + \alpha d)$ eine konvexe quadratische Funktion

$\ell'(\alpha) = \nabla f(x+\alpha d)^T d = (A(x+\alpha d) + c)^T d \overset{!}{=} 0$ d.h. $\alpha^* = \dfrac{-x^T A d - c^T d}{d^T A d}$.

<u>Übung:</u> Man gebe ein einfaches Verfahren an um α^* anhand von $\ell(\alpha_1)$, $\ell(\alpha_2)$ und $\ell(\alpha_3)$ mit $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ zu bestimmen.

<u>Bem 2:</u> Falls d und $\bar{d}$ A-konjugiert sind, so ist

$$d^T \underbrace{\nabla f(x + \alpha \bar{d})}_{Ax + c + \alpha A \bar{d}} \equiv \text{const} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

#