Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Florian Jarre
Dr. Erik Chudzik
Melinda Hagedorn
Kevin Wischnewski

10.04.2025

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
Punkte					

Numerik I – 1. Übungsblatt

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Geben Sie für die folgenden Dezimalzahlen die binäre Gleitkommadarstellung an. Gehen Sie dabei von einer vierstelligen Mantisse, d.h. 4 Nachkommastellen, und vier Stellen im Exponenten aus mit Bias $2^{4-1} - 1 = 7$. Geben Sie den relativen Fehler an, falls gerundet werden muss.

(i) 88

(ii) 0,2

(iii) −0,6875

(b) Geben Sie für $a = 4/5$ und $b = 5/6$ die binäre Gleitkommadarstellung mit

(i) drei- und

(ii) fünfstelliger

Mantisse an und berechnen Sie jeweils die Differenz $b - a$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Im Folgenden wird die Landau Symbolik zur Aufwandsabschätzung numerischer Algorithmen verwendet. Die betrachteten Algorithmen hängen von der Problemgröße n ab. Beispielsweise ist n die Zahl der zu sortierenden Objekte in einer Liste. Die Laufzeit der Algorithmen ist durch die Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie:

(a) für $f(n) = 2n^2 + 3n + 4$ ist $f(n) = \mathcal{O}(n^2)$, $n \to \infty$,

(b) für $f(n) = \sin(n^2)$ ist $f(n) = \mathcal{O}(n)$, $n \to \infty$,

(c) für $f(n) = \dfrac{n^2}{\ln(n+1)}$ ist $f(n) = \mathcal{O}(n^2)$, $n \to \infty$.

Aufgabe 3 (4 Punkte, Abgabe dieser Aufgabe erst bis 24.4.25)

Die folgenden Funktionen ϕ_i beschreiben mathematische Aufgaben im Sinne der Vorlesung. Bestimmen Sie jeweils die Konditionszahl der Aufgaben und geben Sie ggf. Bereiche an, in denen die Aufgabe schlecht konditioniert ist.

(a) $\phi_1 : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad \phi_1(x) := \log(x)$,

(b) $\phi_2 : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}, \ \phi_2(x) := \tan(x)$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Ähnlich wie das in der Vorlesung eingeführte 64 Bit Format existiert auch ein 32 Bit Format. Hier werden üblicherweise 1 Bit für das Vorzeichen, 8 Bit für den Exponenten sowie 23 Bit für die Mantisse gespeichert. Die Darstellung der Zahlen sieht dann wie folgt aus:

$$x = \pm(1+f)2^{c-127}$$

(a) Bestimmen Sie alle möglichen Zahlen c und somit alle möglichen Exponenten. Der höchste und niedrigste Exponent sind wieder reserviert für subnormale Zahlen bzw. `inf` und `nan`. Bestimmen Sie dann die größte und kleinste Gleitkommazahl $x_{\max}$, $x_{\min}$. Bestimmen Sie außerdem die kleinste positive sowie die größte negative Zahl x_{posmin}, x_{negmax}, die unter Vernachlässigung der subnormalen Zahlen dargestellt werden können.

(b) Bestimmen Sie die Maschinengenauigkeit `eps`.

(c) Wie vielen Zahlen wird der Wert `nan` zugeordnet?

Programmier-Aufgabe (6 Punkte)

(a) Seien A das numerische Gleitkommagitter und $x, y, z \in A$. Verifizieren Sie anhand geeigneter Beispiele

(i) $(x \oplus y) \oplus z \neq x \oplus (y \oplus z)$

(ii) $(x \oplus y) \odot z \neq (x \odot z) \oplus (y \odot z)$

(b) Seien $m_i = 1 + f_1 2^{-1} + f_2 2^{-2} + \ldots + f_i 2^{-i}$, $i \in \mathbb{N}_0$ mit $f_k \in \{0,1\}$, $k = 1, \ldots, i$ und $e \in \{0,1,2\}$. Sei ferner A_i die Menge aller in der Form $x = \pm m_i 2^{\pm e}$ darstellbaren reellen Zahlen.
Stellen Sie $A_i \cup \{0\}$, $i = 1, \ldots, 3$ sowie die zugehörigen Maschinengenauigkeiten in einem Plot grafisch dar.

Wiederholung aus der Computergestützte Mathematik zur Linearen Algebra:

(c) Im ILIAS finden Sie im Ordner "Materialien" ein Programm `SolveL.py` zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Lx = b$, wobei $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine untere, linke Dreiecksmatrix ist und $x, b \in \mathbb{R}^n$. Verstehen Sie dieses und schreiben Sie analog ein Programm zur Lösung von $Rx = b$, wobei $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine obere, rechte Dreiecksmatrix ist.

Ihre Lösungen können Sie über das ILIAS bis zum 17.04.2025 10 Uhr abgeben. Verwenden Sie hierzu für die theoretischen Aufgaben eine PDF-Datei (höchstens 2 MB) und für die Programmier-Aufgaben eine py- oder ipynb-Datei. Die theoretischen Aufgaben werden in den Übungen ab dem 22.04.2025 besprochen. Um Punkte für die Programmieraufgaben zu erhalten, müssen Sie diese in den Programmierübungen vorstellen.