

Aufgabe	32	33	34	Σ
Punkte				

## Numerik I – 10. Übungsblatt

### Aufgabe 32 (10 Punkte)

Gegeben Seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ -6 & 6 & 1 & 8 \\ 7 & -10 & 10 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 14 & 6 & 14 \\ 2 & -1 & 7 & 3 \\ 8 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & -5 & -12 & -9 \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie die  $LR$ -Zerlegung (ohne Pivotisierung) der Matrix  $A$  und nutzen Sie diese zur Lösung des Gleichungssystems  $Ax = b$  unter Verwendung der Vorwärts- und Rückwärtssubstitution, wobei  $b = (2, -3, -6, 3)^T$ .
- Berechnen Sie die  $LR$ -Zerlegung (mit Pivotisierung) der Matrix  $B$  und nutzen Sie diese zur Berechnung der Determinante von  $B$ . Ist bei dieser Matrix die Pivotisierung für die Berechnung der  $LR$ -Zerlegung notwendig?

### Aufgabe 33 (10 Punkte)

Seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  und  $L_i$  eine elementare Matrix aus dem Gauß'schen Eliminationsverfahren, d. h.

$$L_i = \text{Id} + l_i e_i^T = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & l_{i+1,i} & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots \\ & & l_{n,i} & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \text{mit} \quad l_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ l_{i+1,i} \\ \vdots \\ l_{n,i} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie:

$$L_i^{-1} = \text{Id} - l_i e_i^T = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & -l_{i+1,i} & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots \\ & & -l_{n,i} & & & 1 \end{pmatrix}$$

und  $L := (L_{n-1} \cdot \dots \cdot L_1)^{-1} = \text{Id} - \sum_{i=1}^{n-1} l_i e_i^T = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -l_{2,1} & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ -l_{n,1} & \dots & -l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}.$

### Aufgabe 34 (10 Punkte)

Betrachten Sie

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ -3 & \eta & 1 \\ 0 & 1 & \mu \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

- Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung von  $A$  und zeigen Sie, für welche  $\eta, \mu \in \mathbb{R}$  diese existiert.
- Bestimmen Sie  $\det(A)$ .
- Lösen Sie für  $\eta = 3$  und  $\mu = 2$  das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  unter Verwendung der Cholesky-Zerlegung.

### Programmier-Aufgabe 10 (4 Punkte)

Folgender Pseudoalgorithmus berechnet die Cholesky Zerlegung einer symmetrischen positiv definiten Matrix  $A$ :

Eingabe: Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Setze  $L = 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Für  $j = 1, \dots, n$ :

$$l_{jj} = \sqrt{a_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2}$$

Für  $i = j + 1, \dots, n$ :

$$l_{ij} = \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk} \right) / l_{jj}$$

Rückgabe:  $L$

- Implementieren Sie den Pseudoalgorithmus als Funktion `cholesky(A)`.
- Testen Sie ihre Funktion an geeigneten Matrizen, insbesondere der Form  $A = B^T B$ .

**Bonus-Aufgabe** (10 Punkte)

Die Punkte dieser Aufgabe werden nicht zu den maximal erreichbaren Punkten gezählt, d. h. Sie können hier bis zu 10 Zusatzpunkte erwerben.

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 8 & 2 \\ 4 & 14 & \alpha & 8 \\ 2 & 8 & 12 & 2 \\ 6 & 8 & 18 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 16 \\ 39 \\ 21 \\ 34 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

- (a) Für welchen Wert von  $\alpha$  besitzt  $A$  keine  $LR$ -Zerlegung ohne Permutationsmatrix?
- (b) Berechnen Sie im Existenzfall die  $LR$ -Zerlegung ohne Pivotisierung von  $A$  und geben Sie die Matrizen  $L$  und  $R$  explizit an.
- (c) Für den Fall, dass  $A$  keine  $LR$ -Zerlegung besitzt, geben Sie eine Permutationsmatrix  $P$  an, dass  $PA$  eine  $LR$ -Zerlegung besitzt und lösen Sie mit Hilfe der  $LR$ -Zerlegung das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$ .

Ihre Lösungen können Sie über das ILIAS bis zum 19.06.2025 10 Uhr abgeben. Verwenden Sie hierzu für die theoretischen Aufgaben eine PDF-Datei (höchstens 2 MB) und für die Programmier-Aufgaben eine py- oder ipynb-Datei. Die theoretischen Aufgaben werden in den Übungen ab dem 24.06.2025 besprochen. Um Punkte für die Programmieraufgaben zu erhalten, müssen Sie diese in den Programmierübungen vorstellen.