

Aufgabe	35	36	37	38	Σ
Punkte					

## Numerik I – 11. Übungsblatt

### Aufgabe 35 (6 Punkte)

Zeigen Sie: Bei einer symmetrischen, positiv definiten Matrix sind alle Hauptabschnittsmatrizen positiv definit und alle Hauptabschnittsdeterminanten positiv.

### Aufgabe 36 (8 Punkte)

Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegungen von

$$(a) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad (b) B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 10 \\ 6 & 13 & 13 \\ 10 & 13 & 27 \end{pmatrix}, \quad (c) C = \begin{pmatrix} 4 & 12 & -16 \\ 12 & 37 & -43 \\ -16 & -43 & 98 \end{pmatrix}$$

und (d) nutzen Sie diese zur Lösung des linearen Gleichungssystems  $Bx = (6, 19, 9)^T$ .

### Aufgabe 37 (8 Punkte)

Bestimmen Sie mittels Gram-Schmidt die reduzierte  $QR$ -Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

### Aufgabe 38 (8 Punkte)

Bestimmen Sie mittels Householder Transformation eine  $QR$ -Zerlegung der Matrix

$$A = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} -7 & 5 & 12 \\ 15 & 51 & 90 \\ 7 & 31 & 6 \\ -1 & -25 & 12 \end{pmatrix}$$

und lösen Sie damit das lineare Ausgleichsproblem  $\|Ax - b\|_2^2 \rightarrow \min$  für  $b = (1, 1, 0, 0)^T$ .

### Programmier-Aufgabe 11 (6 Punkte)

- (a) Implementieren Sie eine Funktion `linearLSQNormal(A, b)`, die mit Hilfe der Normalgleichung und Cholesky-Zerlegung das lineare Ausgleichsproblem zu  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mit vollem Rang und  $b \in \mathbb{R}^n$  für  $m \geq n$  löst.
- (b) Implementieren Sie eine Funktion `linearLSQQR(A, b)`, die mit Hilfe der  $QR$ -Zerlegung das selbe lineare Ausgleichsproblem wie in (a) löst.
- (c) Vergleichen Sie die Stabilität beider Funktionen anhand des linearen Ausgleichsproblems

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} \\ \epsilon \\ \epsilon \end{bmatrix},$$

wobei  $\epsilon = 10^{-i}$ ,  $i = 0, \dots, 15$ .

*Hinweis* Im ILIAS finden Sie eine Datei `PA11.py`, welche die benötigten Routinen enthält.

**Ihre Lösungen können Sie über das ILIAS bis zum 26.06.2025 10 Uhr abgeben. Verwenden Sie hierzu für die theoretischen Aufgaben eine PDF-Datei (höchstens 2 MB) und für die Programmier-Aufgaben eine py- oder ipynb-Datei. Die theoretischen Aufgaben werden in den Übungen ab dem 01.07.2025 besprochen. Um Punkte für die Programmieraufgaben zu erhalten, müssen Sie diese in den Programmierübungen vorstellen.**