Mathematisches Institut
Prof. Dr. Florian Jarre
Dr. Erik Chudzik
Melinda Hagedorn
Kevin Wischnewski

26.06.2025

Aufgabe	39	40	41	42	Σ
Punkte					

Numerik I – 12. Übungsblatt

Aufgabe 39 (8 Punkte)

Seien $x \in \mathbb{R}^n$ und

$$Q = I - 2\frac{ww^{\mathrm{T}}}{w^{\mathrm{T}}w}$$

eine Householder-Reflexion. Zeigen Sie: Falls $w = x \pm \|x\|_2 e_1$, so gilt $Qx = \mp\|x\|_2 e_1$.

Aufgabe 40 (8 Punkte)

Die Messung eines Signals der Form

$$f(t) = \alpha \sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) - \beta \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$$

liefere die Tabelle

t_i	1	2	3
f_i	0	1	0

.

Die Parameter α und β sollen im Sinne der Methode der kleinsten Fehlerquadrate optimal bestimmt werden. Geben Sie das entsprechende lineare Ausgleichsproblem an, stellen Sie die Normalengleichungen auf und lösen Sie diese.
Hinweis: Die Sinus- und Cosinuswerte lassen sich explizit angeben (was das Rechnen erleichtert).

Aufgabe 41 (6 Punkte)

(a) Zur Bestimmung einer Nullstelle eines Polynoms kann man das Newton-Verfahren verwenden. Geben Sie für das Polynom

$$p(x) = \frac{1}{3}x^4 - x^3 + 4x + 1$$

die zugehörige Iterationsvorschrift an und berechnen Sie die ersten beiden Iterierten x_1 und x_2 ausgehend vom Startwert $x_0 = 3$.

(b) Zeigen Sie: Das Newton-Verfahren zur Approximation der Minimalstelle von $p(x) = ax^2 + bx + c$, wobei $a > 0$ gelte, konvergiert in einem Schritt.

Aufgabe 42 (8 Punkte)

Zur Bestimmung einer Nullstelle einer Funktion kann man ausgehend von einem Startwert x_0 das Newton-Verfahren verwenden. Seien

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto p(x) = x^3 + x^2 + 2, \quad x_0 = -1,$$

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto f(x) = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{b_i - a_i^T x} a_i,$$

$$A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ a_2^T \\ a_3^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad x_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Formulieren Sie für die beiden Funktionen die Iterationsvorschrift, wobei Sie die jeweiligen Ableitungen berechnen.

(b) Berechnen Sie für die Funktionen p und f die ersten beiden Iterierten x_1 und x_2.

Programmier-Aufgabe 12 (4 Punkte)

Gegeben sei folgender Pseudoalgorithmus:

> `Eingabe: Matrix` $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
> `Setze` R `= Kopie von` A`,` $Q = Id_{m\times m}$
> `Für` j `=` $1, \dots, n$`:`
>   `Für` $i = m, m-1, \dots, j+1$`:`
>   `Falls` $R_{i,j} \neq 0$`:`
>   `Setze` $a = R_{i-1,j}$`,` $b = R_{i,j}$
>   `Setze` $G = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$
>   `Setze` $\begin{bmatrix} R_{i-1} \\ R_i \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} R_{i-1} \\ R_i \end{bmatrix}$
>   `Setze` $\begin{bmatrix} Q_{i-1} \\ Q_i \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} Q_{i-1} \\ Q_i \end{bmatrix}$
> `Setze` Q `=` Q^T
> `Rückgabe:` Q`,` R

Dabei seien R_i und Q_i die i-te Zeile von R bzw. Q. Falls A vollen Spaltenrang hat, berechnet dieser die QR-Zerlegung von A mittels sog. Givensrotationen.

(a) Implementieren Sie den Pseudoalgorithmus als Funktion `Givens(A)`.

(b) Testen Sie ihre Funktion an $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ und $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Ihre Lösungen können Sie über das ILIAS bis zum 03.07.2025 10 Uhr abgeben. Verwenden Sie hierzu für die theoretischen Aufgaben eine PDF-Datei (höchstens 2 MB) und für die Programmier-Aufgaben eine py- oder ipynb-Datei. Die theoretischen Aufgaben werden in den Übungen ab dem 08.07.2025 besprochen. Um Punkte für die Programmieraufgaben zu erhalten, müssen Sie diese in den Programmierübungen vorstellen.