Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. FLORIAN JARRE
DR. ERIK CHUDZIK
MELINDA HAGEDORN
KEVIN WISCHNEWSKI

03.07.2025

Aufgabe	43-49	Σ
Punkte		

Numerik I – 13. Übungsblatt

Hinweis: Dieses Blatt enthält hauptsächlich Klausuraufgaben aus früheren Semestern. Für die Zulassung zur Klausur werden 40% der erreichbaren Theorieaufgaben-Punkte der Blätter 1-13 (also mind. 156 Punkte) UND 40% der erreichbaren Programmieraufgaben-Punkte der Blätter 1-12 (also mind. 25 Punkte) benötigt. Die Programmieraufgabe auf diesem Blatt ermöglicht es Ihnen somit Bonus-Programmieraufgaben-Punkte zu sammeln.

Aufgabe 43 (4 Punkte)

(a) Bestimmen Sie für folgende Funktionen jeweils alle $p \in \mathbb{N}_0$ mit $f(h) = \mathcal{O}(h^p)$ für $h \to 0$.

  (i) $f(h) = -h - \ln(1-h)$

  (ii) $f(h) = \frac{1-\cos(h)}{h^2}$

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Bestimmen Sie alle $p \in \mathbb{N}_0$, sodass

$$\frac{2f(x+h) + 3f(x) - 6f(x-h) + f(x-2h)}{6h} - f'(x) = \mathcal{O}(h^p) \quad \text{für } h \to 0.$$

Aufgabe 44 (4 Punkte)

Berechnen Sie das Interpolationspolynom $p(x)$ geringsten Grades zu den Daten

x_i	-1	0	2
$f(x_i)$	0	-3	-3
$f'(x_i)$	-4		8
$f''(x_i)$			16

Geben Sie das Polynom in Monombasis an und überprüfen Sie die Interpolationsbedingungen.

Aufgabe 45 (4 Punkte)

Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2^2 \to \min$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

unter Verwendung der QR-Zerlegung. Berechnen Sie die QR-Zerlegung mittels Gram-Schmidt.

Aufgabe 46 (4 Punkte)

(a) Nennen Sie zwei Vorteile der Spline-Interpolation gegenüber der Polynominterpolation.

(b) Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

  (i) Bestimmen Sie den natürlichen kubischen Spline zu der Funktion $f(x)$ und den Knoten $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

  (ii) Geben Sie eine obere Schranke für den gemachten Interpolationsfehler an.

(c) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in C^4([a, b])$ und s der kubische Spline durch die Punkte $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \ldots, n$ mit $f''(a) = f''(b) = 0$. Gegeben Sie das größte p an, für welches

$$|f(x) - s(x)| = \mathcal{O}(h^p)$$

gilt, wobei h die maximale Intervalllänge ist. (Hier ist kein Beweis verlangt, schreiben Sie nur das korrekte p auf).

Aufgabe 47 (4 Punkte)

(a) Es sei eine Quadraturformel

$$Q_n(f) = \sum_{j=0}^{n} a_j\, f(x_j), \quad a_j \in \mathbb{R}, \quad f : [0, 1] \to \mathbb{R},$$

mit $0 \le x_0 < \ldots < x_n \le 1$ auf dem Grundintervall $[0, 1]$ gegeben. Zeigen Sie die folgende Aussage:
Die Quadraturformel Q_n hat genau dann die Ordnung $m \in \mathbb{N}$, wenn

$$\sum_{j=0}^{n} a_j\, x_j^{k-1} = \frac{1}{k} \quad \text{für alle} \quad k = 1, \ldots, m$$

erfüllt ist.

(b) Betrachten Sie nun die Quadraturformel

$$Q_3(f) = \tfrac{3}{4} f(-1) - \tfrac{1}{2} f\left(-\tfrac{1}{3}\right) + \tfrac{7}{4} f\left(\tfrac{1}{3}\right)$$

zum Grundintervall $[-1, 1]$. Bestimmen Sie mit Hilfe von Aufgabenteil (a) die Ordnung von Q_3.

Aufgabe 48 (6 Punkte)

Untersuchen Sie, ob das nichtlineare Gleichungssystem

$$x = \exp\left(\tfrac{1}{2}(\sin(y) - 1)\right) \quad \text{und} \quad y = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

eine eindeutige Lösung $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ besitzt.
Formulieren Sie eine Behauptung und beweisen Sie diese.

Aufgabe 49 (4 Punkte)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & \alpha & 7 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \text{ mit } \alpha \in \mathbb{R}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

(a) Für welche Werte $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt A eine LR-Zerlegung? Für welche Werte $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt A eine LR-Zerlegung ohne Pivotisierung?

(b) Berechnen Sie im Existenzfall die LR - Zerlegung von A ohne Pivotisierung und geben Sie die Matrizen L und R explizit an.

(c) Für $\alpha = 8$ geben Sie eine Permutationsmatrix derart an, dass PA eine LR-Zerlegung besitzt und lösen Sie damit das lineare Gleichungssystem $Ax = b$.

Programmier-Aufgabe 13 (4 Zusatz-Punkte)

(a) Sei $a < b$, f stetig auf $[a, b]$ und $f(a) \cdot f(b) < 0$. Implementieren Sie in einer Funktion `bisectionMethod(f, a, b)` das Bisektionsverfahren zum finden einer Nullstelle von f im Interval $[a, b]$.

(b) Es gelten dieselben Voraussetzungen wie in (a). Implementieren Sie in einer Funktion `secantMethod(f, x0, x1,a,b)` die Sekantenmethode. Überprüfen Sie dabei auch in jeder Iteration, ob die Approximation an die Nullstelle im Intervall $[a, b]$ liegt.

(c) Testen Sie Ihre Funktionen an eigens gewählten Beispielen sowie den Beispielen aus dem Skript.

Ihre Lösungen können Sie über das ILIAS bis zum 10.07.2025 10 Uhr abgeben. Verwenden Sie hierzu für die theoretischen Aufgaben eine PDF-Datei (höchstens 2 MB) und für die Programmier-Aufgaben eine py- oder ipynb-Datei. Die theoretischen Aufgaben werden in den Übungen ab dem 15.07.2025 besprochen. Um Punkte für die Programmieraufgaben zu erhalten, müssen Sie diese in den Programmierübungen vorstellen.