

Aufgabe	5	6	7	Σ
Punkte				

Numerik I – 2. Übungsblatt

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Die Aufwärtsgeschwindigkeit $f(t)$, (m/s), einer vom Boden aus abgefeuerten Rakete wird zu bestimmten Zeitpunkten t für die Zeit $0 \leq t \leq 10$ gemessen. Die Messungen sind in der Tabelle angegeben.

t	0	2	6	8	10
$f(t)$	0	15	741	2244	5355

Unter Verwendung der obigen Tabelle soll die Aufwärtsgeschwindigkeit der Rakete zu beliebigen Zeitpunkten geschätzt werden können. Berechnen Sie dazu das Interpolationspolynom zu den gegebenen Stützstellen und Funktionswerten

- (a) in der Lagrange-Darstellung, d.h. bestimmen Sie für die Darstellung

$$P_n(t) = \sum_{j=0}^n f_j l_{jn}(t)$$

die Koeffizienten f_j und die Polynome l_{jn} .

- (b) in der Newton-Darstellung, d.h. bestimmen Sie für die Darstellung

$$P_n(t) = \sum_{j=0}^n (f[t_0, \dots, t_j]) w_j(t)$$

die Koeffizienten $f[t_0, \dots, t_j]$, $j = 0, \dots, n$, und die Polynome w_j .

- (c) bzgl. der Monombasis, d.h. bestimmen Sie die Koeffizienten b_j für die Darstellung

$$P_n(t) = \sum_{j=0}^n b_j t^j.$$

Werten Sie das Interpolationspolynom für $t = 4$ und $t = 7$ aus.

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass für $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ und für eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$f[x_0, x_1] = f'(x_0) + \mathcal{O}(|x_0 - x_1|), \quad \text{für } |x_0 - x_1| \rightarrow 0.$$

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass für die Vandermonde-Matrix

$$V_n := \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

die folgende Beziehung gilt:

$$\det(V_n) = \prod_{i=0}^n \prod_{j=i+1}^n (x_j - x_i).$$

Programmier-Aufgabe (6 Punkte)

Gegeben seien Knoten $x = (x_0, \dots, x_n)$ und Daten $f = (f_0, \dots, f_n)$.

- (a) Schreiben Sie eine Funktion `divDiff(x,f)`, welche die Matrix `Delta` $\in \mathbb{R}^{n+1,n+1}$ mit

$$\text{Delta}(i,k) = \begin{cases} [x_i, \dots, x_{i+k}]f & ; k = 0, \dots, n, i = 0, \dots, n-k \\ 0 & ; \text{sonst} \end{cases}$$

zurückgibt.

- (b) Schreiben Sie eine Funktion `Horner(x,Delta,y)`, welche mittels des Horner-Schemas und `Delta = divDiff(x,f)` das Interpolationspolynom zu x und f im Punkt y auswertet.
- (c) Seien $x = (-4, -1, 0, 3)$ und $f = (1, 3, -3, 1)$. Plotten Sie `Horner(x,Delta,y)` gegen $y \in [-4.1, 3.1]$ und (x_i, f_i) $i = 0, \dots, 3$ in einen Plot.

Ihre Lösungen können Sie über das ILIAS bis zum 24.04.2025 10 Uhr abgeben. Verwenden Sie hierzu für die theoretischen Aufgaben eine PDF-Datei (höchstens 2 MB) und für die Programmier-Aufgaben eine py- oder ipynb-Datei. Die theoretischen Aufgaben werden in den Übungen ab dem 29.04.2025 besprochen. Um Punkte für die Programmieraufgaben zu erhalten, müssen Sie diese in den Programmierübungen vorstellen.