

Aufgabe	8	9	10	11	Σ
Punkte					

## Numerik I – 3. Übungsblatt

### Aufgabe 8 (10 Punkte)

Seien  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $I \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$  ein Intervall mit  $0 \in I$  ist.

(a) Es gelte  $f \in \mathcal{O}(h^p)$  und  $g \in \mathcal{O}(h^q)$  für  $h \rightarrow 0$  und geeignete  $p, q \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie:

(i)  $(f + g) \in \mathcal{O}(h^{\min(p,q)})$  für  $h \rightarrow 0$ ,

(ii)  $(f \cdot g) \in \mathcal{O}(h^{p+q})$  für  $h \rightarrow 0$ .

(b) Die Funktion  $g$  habe keine Nullstellen nahe 0. Zeigen Sie:

$$f \in o(g) \Rightarrow f \in \mathcal{O}(g) \quad \text{für } h \rightarrow 0.$$

### Aufgabe 9 (5 Punkte)

Berechnen Sie das Interpolationspolynom zu den Stützstellen und Funktionswerten

$t$	-2	2	0	-4
$f(t)$	4	8	10	-10

in der angegebenen Reihenfolge in der Newton-Darstellung, d.h. bestimmen Sie für die Darstellung

$$P_n(t) = \sum_{j=0}^n (f[t_0, \dots, t_j]) w_j(t)$$

die Koeffizienten  $f[t_0, \dots, t_j]$ ,  $j = 0, \dots, n$ , und die Polynome  $w_j$ . Werten Sie das Interpolationspolynom für  $t = 4$  und  $t = 7$  aus.

### Aufgabe 10 (5 Punkte)

Bestimmen Sie das Polynom  $p$ , das den Interpolationsbedingungen

$$p(1) = 4, \quad p'(1) = 2, \quad p''(1) = 2, \quad p(2) = 1, \quad p'(2) = 3$$

genügt. Werten Sie das Polynom mithilfe des Horner-Schemas bei  $x = 0$  aus.

### Aufgabe 11 (10 Punkte)

Leiten Sie die Gewichte für die baryzentrische Interpolation in Tschebyscheff-Knoten 1. Art (den Nullstellen der Tschebyscheff-Polynome  $T_{n+1}$ ) her:

$$\lambda_j = (-1)^j \sin\left(\frac{(2j+1)\pi}{2(n+1)}\right) \quad \text{für } j \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

### Programmier-Aufgabe 3 (4 Punkte)

Gegeben seien eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und  $[a, b] \subset \mathbb{R}$

- (a) Schreiben Sie eine Funktion `BaryInt(f, n, a, b, z, Art)`, die in einem Intervall  $[a, b]$  das baryzentrische Interpolationspolynom vom Grad  $n$  berechnet, das die Funktion  $f$  in den Tschebyscheff-Knoten 1. bzw. 2. Art interpoliert. Ausgegeben werden soll die Auswertung des Interpolationspolynoms in Stellen aus einem eindimensionalen array  $z$ .
- (b) Sei

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0.5 & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

die Heaviside-Funktion,  $a = -2$ ,  $b = 2$  und  $n = 60$ .

Plotten Sie

- (i) `BaryInt(f, n, a, b, z, 1)`,
- (ii) `BaryInt(f, n, a, b, z, 2)` und
- (iii) das Newtonsche Interpolationspolynom von  $f$  auf  $[a, b]$  zu den  $n$  Tschebyscheff-Knoten 2. Art

in drei Subplots untereinander. Verwenden Sie für das Plotten des Newtonschen Interpolationspolynoms die Funktionen `divDiff` und `Horner` aus der Programmieraufgabe von Blatt 2 (Musterlösung finden Sie im ILIAS).

**Ihre Lösungen können Sie über das ILIAS bis zum 01.05.2025 10 Uhr abgeben. Verwenden Sie hierzu für die theoretischen Aufgaben eine PDF-Datei (höchstens 2 MB) und für die Programmier-Aufgaben eine py- oder ipynb-Datei. Die theoretischen Aufgaben werden in den Übungen ab dem 06.05.2025 besprochen. Um Punkte für die Programmieraufgaben zu erhalten, müssen Sie diese in den Programmierübungen vorstellen.**