Mathematisches Institut
Prof. Dr. Florian Jarre
Dr. Erik Chudzik
Melinda Hagedorn
Kevin Wischnewski

01.05.2025

Aufgabe	12	13	14	Σ
Punkte				

Numerik I – 4. Übungsblatt

Aufgabe 12 (10 Punkte)

Es sei $f := [-5,5] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \frac{1}{1+x^2}.$$

Berechnen Sie die kubische Spline-Interpolierende mit natürlichen Randbedingungen zu den Stützstellen $x_j = -5 + 2j$, $j = 0, \dots, 5$.

Aufgabe 13 (10 Punkte)

Es seien $X : a = x_0 < \dots < x_n = b$, $n \in \mathbb{N}$, eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$, $f \in C^2([a,b], \mathbb{R})$, $h := \max_{j=1,\dots,N}(x_j - x_{j-1})$ und $s \in S_1(X)$ der f in den Punkten $x_0, \dots, x_N$ interpolierende Spline (d.h. ein stetiger Polygonzug).
Zeigen Sie:

(a) $\|f - s\|_{\infty,[a,b]} \leq \frac{1}{2} h^2 \|f^{(2)}\|_{\infty,[a,b]}$,

(b) $\|f' - s'\|_{\infty,[a,b]} := \max_{j=1,\dots,N} \|f' - s'\|_{\infty,[x_{j-1},x_j]} \leq h \|f^{(2)}\|_{\infty,[a,b]}$.

Hinweis: Beweisen Sie die entsprechenden Abschätzungen zunächst für jedes Teilintervall $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \dots N$.

Aufgabe 14 (10 Punkte)

Entscheiden und begründen Sie, ob für die Funktionen

(a) $s(x) = \begin{cases} -x, & -2 \leq x < -1 \\ a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4, & -1 \leq x \leq 1 \\ x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

(b) $t(x) = \begin{cases} b_1 + b_2(x-1) + b_3(x-1)^2 + b_4(x-1)^3, & 0 \leq x \leq 1 \\ (x-1)^3 + b_5 x^2 - 1, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$

Wahlen von Parametern $a_1, \dots, a_4, b_1, \dots, b_5 \in \mathbb{R}$ existieren, sodass sie auf $[-2,2]$ bzw. $[0,2]$ natürliche kubische Spline-Funktionen bilden.

Programmier-Aufgabe 4 (6 Punkte)

Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $X : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $n \in \mathbb{N}$, eine äquidistante Zerlegung des Intervalls $[a, b]$. Ferner seien `x` $= [x_0, \ldots, x_n]$ und `f` $= [f(x_0), \ldots, f(x_n)]$ zwei `arrays`.

(a) Schreiben Sie eine Funktion `splineMoments(x,f)`, welche die Momente M_j, $j = 0, \ldots, n$, des natürlichen Splines s als `array M` zurückgibt. Für den natürlichen Spline gilt $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$.

(b) Schreiben Sie eine Funktion `splineInterpol(x,f,xx)`, welche `splineMoments(x,f)` aufruft und die Auswertung des Splines in Stellen aus einem `array xx` zurückgibt.

(c) Seien $a = 0$, $b = 2\pi$, $n = 8$ und $f(x) = \cos(x)$. Plotten Sie den natürlichen Spline zusammen mit den Punkten $(x_j, f(x_j))$, $j = 0, \ldots, n$.

Ihre Lösungen können Sie über das ILIAS bis zum 08.05.2025 10 Uhr abgeben. Verwenden Sie hierzu für die theoretischen Aufgaben eine PDF-Datei (höchstens 2 MB) und für die Programmier-Aufgaben eine py- oder ipynb-Datei. Die theoretischen Aufgaben werden in den Übungen ab dem 13.05.2025 besprochen. Um Punkte für die Programmieraufgaben zu erhalten, müssen Sie diese in den Programmierübungen vorstellen.