Heinrich Heine Universität Düsseldorf

MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. FLORIAN JARRE
DR. ERIK CHUDZIK
MELINDA HAGEDORN
KEVIN WISCHNEWSKI

08.05.2025

Aufgabe	15	16	17	Σ
Punkte				

Numerik I – 5. Übungsblatt

Aufgabe 15 (10 Punkte)

(a) Seien $p_0, \dots, p_n \in \mathbb{P}_n$ mit genauem Grad $\deg(p_k) = k$, $0 \le k \le n$ und $p_0 \equiv c \ne 0$. Zeigen Sie: Dann bildet $\{p_k \mid 0 \le k \le n\}$ eine Basis von $\mathbb{P}_n$.

(b) Bezeichne zu einer stetigen Funktion f das zugehörige Interpolationspolynom bezüglich der Knoten $a \le x_0 < \dots < x_n \le b$ mit $p(f|x_0, \dots, x_n)(x)$. Sei

$$P : C([a,b]) \to \mathbb{P}_n, \quad f \mapsto p(f|x_0, \dots, x_n)$$

die Abbildung, die f auf sein Interpolationspolynom abbildet. Zeigen Sie, dass P eine Projektion ist, d.h. dass gilt:

$$P \circ P = P$$

(c) Zeigen Sie zuletzt, dass P sogar eine Orthogonalprojektion bezüglich

$$\langle f, g \rangle := \sum_{k=0}^{n} f(x_k) g(x_k)$$

ist, d. h. zeigen Sie, dass für $f \in C([a,b])$ gilt:

$$\langle f - P(f), p \rangle = 0, \ \forall p \in \mathbb{P}_n$$

Aufgabe 16 (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie das Hermite-Interpolationspolynom p zu den Daten $x_1 = -1$, $f(x_1) = 2$, $x_2 = 1$, $f(x_2) = 4$, $f'(x_2) = p'(x_2) = 3$ und $f''(x_2) = p''(x_2) = 1$.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Newtonschen dividierten Differenzenschemas das Polynom kleinsten Grades q, das die Daten $x_1 = -1$, $f(x_1) = 2$ und $x_2 = 1$, $f(x_2) = 4$ interpoliert (d.h. $q(x_1) = 2$ und $q(x_2) = 4$) und zusätzlich $q''(x_2) = 2$ erfüllt.
Hinweis: Man setze $f'(x_2) = \alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und bestimme anschließend α, sodass der Grad von q minimal wird.

(c) Geben Sie $q'(x_2)$ an, *ohne* $q(x)$ abzuleiten.

Aufgabe 17 (10 Punkte)

Eine wichtige Anwendung für die Hermite-Interpolation ist die sogenannte *kubische Hermite-Interpolation.* Hierbei werden an zwei Knoten t_0, t_1 jeweils Funktionswerte $f(t_0)$, $f(t_1)$ und Ableitungen $f'(t_0)$, $f'(t_1)$ gegeben. Dadurch ist ein kubisches Polynom $P \in \mathbb{P}_3$ eindeutig bestimmt. Man definiert die Hermite-Polynome $H_0^3, \ldots, H_3^3 \in \mathbb{P}_3$ durch

$$\begin{aligned}
H_0^3(t_0) &= 1, \quad \tfrac{d}{dt}H_0^3(t_0) = 0, \quad H_0^3(t_1) = 0, \quad \tfrac{d}{dt}H_0^3(t_1) = 0,\\
H_1^3(t_0) &= 0, \quad \tfrac{d}{dt}H_1^3(t_0) = 1, \quad H_1^3(t_1) = 0, \quad \tfrac{d}{dt}H_1^3(t_1) = 0,\\
H_2^3(t_0) &= 0, \quad \tfrac{d}{dt}H_2^3(t_0) = 0, \quad H_2^3(t_1) = 1, \quad \tfrac{d}{dt}H_2^3(t_1) = 0,\\
H_3^3(t_0) &= 0, \quad \tfrac{d}{dt}H_3^3(t_0) = 0, \quad H_3^3(t_1) = 0, \quad \tfrac{d}{dt}H_3^3(t_1) = 1.
\end{aligned}$$

Die Polynome $\{H_0^3(t), H_1^3(t), H_2^3(t), H_3^3(t)\}$ bilden dann eine Basis von $\mathbb{P}_3$, die sogenannte *kubische Hermite-Basis* bzgl. der Knoten t_0 und t_1.
Das Hermite-Interpolationspolynom zu den Werten $\{f(t_0), f'(t_0), f(t_1), f'(t_1)\}$ ist dabei gegeben als

$$P(t) = f(t_0)H_0^3(t) + f'(t_0)H_1^3(t) + f(t_1)H_2^3(t) + f'(t_1)H_3^3(t). \tag{1}$$

(a) Berechnen sie die kubischen Hermite-Basispolynome $\{H_0^3(t), H_1^3(t), H_2^3(t), H_3^3(t)\}$ für den Fall $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, dh. $t \in [0, 1]$.

(b) Geben Sie die Formel des Interpolationspolynoms (1) für ein beliebiges Intervall $t \in [a, b]$ explizit an, indem sie eine geeignete Transformation auf ihr Ergebnis aus (a) anwenden.

Programmier-Aufgabe 5 (6 Punkte)

Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $X : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $n \in \mathbb{N}$, eine äquidistante Zerlegung des Intervalls $[a, b]$. Ferner seien `x` $= [x_0, \ldots, x_n]$ und `f` $= [f(x_0), \ldots, f(x_n)]$ zwei `arrays`.

(a) Erweitern Sie Ihre Funktion aus Programmier-Aufgabe 4 (a) zu `splineMoments(x,f,Art)`, welche die Momente M_j, $j = 0, \ldots, n$, der Spline-Interpolation als `array M` zurückgibt. Falls `Art` $= 1$ gilt, sollen die Momente des natürlichen Splines zurückgegeben werden, falls `Art` $= 2$ gilt, die des periodischen Splines und für alle anderen Werte von `Art` die des not-a-knot Splines.

(b) Erweitern Sie ebenfalls Ihre Funktion aus Programmier-Aufgabe 4 (b) zu `splineInterpol(x,f,Art,xx)`, welche `splineMoments(x,f,Art)` aufruft und die Auswertung des Splines in Stellen aus einem `array xx` zurückgibt.

(c) Plotten Sie den natürlichen, den periodischen und den not-a-knot Spline zusammen mit den Punkten $(x_j, f(x_j))$, $j = 0, \ldots, n$ für eine selbstgewählte Funktion f sowie für die Funktion aus Programmier-Aufgabe 4 (c), jeweils in einen Plot.

Ihre Lösungen können Sie über das ILIAS bis zum 15.05.2025 10 Uhr abgeben. Verwenden Sie hierzu für die theoretischen Aufgaben eine PDF-Datei (höchstens 2 MB) und für die Programmier-Aufgaben eine py- oder ipynb-Datei. Die theoretischen Aufgaben werden in den Übungen ab dem 20.05.2025 besprochen. Um Punkte für die Programmieraufgaben zu erhalten, müssen Sie diese in den Programmierübungen vorstellen.