

Aufgabe	18	19	20	21	Σ
Punkte					

Numerik I – 6. Übungsblatt

Aufgabe 18 (6 Punkte)

Zeigen Sie, dass es sich bei folgendem Ausdruck um ein Skalarprodukt auf $C([-1, 1])$ handelt und dass die Tschebyscheff-Polynome $T_0, T_1, \dots, T_n$ orthogonal bezüglich dieses Skalarproduktes sind:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x)g(x) \, dx.$$

Aufgabe 19 (8 Punkte)

Aus Näherungen x_{n-2}, x_{n-1}, x_n an eine Nullstelle x^* einer Funktion f soll eine neue Näherung $x_{n+1} \approx x^*$ durch Interpolation der Funktionswerte $f_k = f(x_k)$, $k = n-2, n-1, n$ mit einem Polynom $p(y)$ (d.h. in Abhängigkeit von y), $p \in \mathbb{P}_2$, berechnet werden. Hierzu werden die Rollen von Stützstellen und Funktionswerten vertauscht!

- Geben Sie das Polynom $p \in \mathbb{P}_2$ in an, dass die Daten (f_{n-2}, x_{n-2}) , (f_{n-1}, x_{n-1}) , (f_n, x_n) interpoliert, wobei die f_i und die x_i beide je streng monoton seien.
- Geben Sie, unter Verwendung dieses Polynoms, eine Formel zur Berechnung von x_{n+1} an.
- Berechnen Sie aus den folgenden Daten die erste Näherung an die Nullstelle der Funktion $f = \sin(x)$.

$f(x)$	$-1/2$	$1/2$	$\sqrt{2}/2$
x	$-\pi/6$	$\pi/6$	$\pi/4$

Aufgabe 20 (8 Punkte)

Es seien $0 \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq 1$, $a_i \in \mathbb{R}$ für $i \in \{0, \dots, n\}$ und

$$Q(f) = \sum_{i=0}^n a_i f(x_i)$$

eine Interpolationsquadraturformel, deren Stützstellen symmetrisch sind, d. h. es gelte

$$x_i = 1 - x_{n-i} \quad \text{für } i \in \{0, \dots, n\}.$$

Zeigen Sie, dass dann auch die Gewichte symmetrisch sind, d. h. es gilt $a_i = a_{n-i}$ für $i \in \{0, \dots, n\}$.

Aufgabe 21 (8 Punkte)

Gibt es eine Wahl von Gewichten $a_i \in \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq 2$, sodass

$$Q(f) = a_0 f\left(-\frac{3}{2}\right) + a_1 f\left(-\frac{1}{2}\right) + a_2 f(1)$$

eine Interpolationsquadraturformel auf $[-2, 2]$ bzw. auf $[-\frac{3}{2}, 1]$ ist? Geben Sie diese Wahlen ggf. an. Bis zu welchem maximalen Grad eines Polynoms kann die Quadraturformel Q ein beliebiges Polynom auf dem jeweiligen Intervall exakt integrieren?

Hinweis: Sie dürfen ein Computer-Algebra-System für die komplizierteren Rechnungen verwenden.

Programmier-Aufgabe 6 (6 Punkte)

Seien $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $X : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $n \in \mathbb{N}$, eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ und $\mathbf{x} = [x_0, \dots, x_n]$ ein `array`.

- (a) Schreiben Sie eine Funktion `SimpsonRegel(a,b,f)`, welche den mittels der Simpsonregel approximierten Wert von $\int_a^b f(x) dx$ zurückgibt, sowie die Fläche plottet, welche das Integral approximiert.
- (b) Schreiben Sie eine Funktion `SimpsonInt(x,f)`, welche `SimpsonRegel` für jedes Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n-1$ aufruft, um $\int_a^b f(x) dx$ zu approximieren und um die Fläche zu plotten, welche das Integral approximiert.
- (c) Seien $a = -1$, $b = 2\pi$ und $f(x) = \cos(x-1)^2 + \sin(0.7x) + x$.

Approximieren Sie mit `SimpsonInt` das Integral $\int_a^b f(x) dx$ für äquidistante Zerlegungen mit $n = 4, 9, 14, 19$ und plotten Sie für jede Zerlegung die Funktion, sowie die approximierende Fläche in einen Plot.

Geben Sie auch den absoluten Fehler der Approximationen aus, indem Sie den analytischen Wert des Integrals von einer vorimplementierten Routine berechnen lassen.

Ihre Lösungen können Sie über das ILIAS bis zum 22.05.2025 10 Uhr abgeben. Verwenden Sie hierzu für die theoretischen Aufgaben eine PDF-Datei (höchstens 2 MB) und für die Programmier-Aufgaben eine py- oder ipynb-Datei. Die theoretischen Aufgaben werden in den Übungen ab dem 27.05.2025 besprochen. Um Punkte für die Programmieraufgaben zu erhalten, müssen Sie diese in den Programmierübungen vorstellen.