

Aufgabe	22	23	24	25	Σ
Punkte					

Numerik I – 7. Übungsblatt

Aufgabe 22 (8 Punkte)

In dieser Aufgabe lernen wir einen alternativen Ansatz zur Berechnung vollständiger kubischer Splines kennen. Die kubischen Basis-Splines zu äquidistanten Stützstellen $x_0, \dots, x_n$ im Intervall $[x_0, x_n]$ sind für $j \in \{2, \dots, n-2\}$ gegeben durch

$$b_j(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} \left(\frac{x-x_{j-2}}{h} \right)^3 & x \in [x_{j-2}, x_{j-1}] \\ \frac{3}{4} \left(\frac{x_j-x}{h} \right)^3 - \frac{3}{2} \left(\frac{x_j-x}{h} \right)^2 + 1 & x \in [x_{j-1}, x_j] \\ \frac{3}{4} \left(\frac{x-x_j}{h} \right)^3 - \frac{3}{2} \left(\frac{x-x_j}{h} \right)^2 + 1 & x \in [x_j, x_{j+1}] \\ \frac{1}{4} \left(\frac{x_{j+2}-x}{h} \right)^3 & x \in [x_{j+1}, x_{j+2}] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die übrigen Basisfunktionen $b_{-1}, b_0, b_1, b_{n-1}, b_n, b_{n+1}$ erhält man analog durch Abschneiden am Intervallende.

- (a) Zeigen Sie, dass alle b_j , $j \in \{-1, \dots, n+1\}$ kubische Splines sind.
- (b) Es sei

$$b(x) = \sum_{j=-1}^{n+1} B_j b_j(x)$$

der gesuchte interpolierende Spline zu $b(x_k) = f(x_k)$ für $k \in \{0, \dots, n\}$ mit $b'(x_0) = f'(x_0)$ und $b'(x_n) = f'(x_n)$. Stellen Sie das zugehörige lineare Gleichungssystem auf.

Aufgabe 23 (6 Punkte)

Zeigen Sie Bemerkung 3.15 (1), dass also die erste Approximation im Romberg-Verfahren, die nicht bloß Trapez-Summen involviert, der Simpson-Regel gleicht.

Aufgabe 24 (8 Punkte)

Mit $B_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}_0$, werde das n -te Bernoulli-Polynom bezeichnet.

- (a) Berechnen Sie die ersten sieben Bernoulli-Zahlen, also B_n für $0 \leq n \leq 6$.
- (b) Zeigen Sie die Reflexions-Formel $B_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$ für $x \in [0, 1]$ und $n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 25 (8 Punkte)

Zeigen Sie mithilfe der in der Vorlesung bewiesenen Euler'schen Summenformel die Identitäten

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \quad \text{und} \quad \sum_{k=0}^n k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

Programmier-Aufgabe 7 (6 Punkte)

Seien $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion und $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Schreiben Sie eine Funktion `trapezRegel(f, a, b, n)`, welche den mittels der iterierten Trapezregel approximierten Wert von $\int_a^b f(x) \, dx$ zurückgibt. Verzichten Sie bei der Implementation auf Schleifen.
- (b) Schreiben Sie eine Funktion `Romberg(f, a, b, eps)`, welche den mittels des Romberg-Verfahrens approximierten Wert $T_{j+1,k+1}$ von $\int_a^b f(x) \, dx$ zurückgibt, falls $|T_{j+1,k} - T_{j,k}| < \text{eps}$, $j, k \in \mathbb{N}_0$. Nutzen Sie für die Berechnung der Startwerte $T_{j,0}$ die Funktion `trapezRegel` aus Teil (a).
- (c) Testen Sie die Funktion `Romberg` für $a = 0$, $b = \pi$, $f(x) = \sin(x)x$ und $\text{eps} = 10^{-8}$.

Ihre Lösungen können Sie über das ILIAS bis zum 29.05.2025 10 Uhr abgeben. Verwenden Sie hierzu für die theoretischen Aufgaben eine PDF-Datei (höchstens 2 MB) und für die Programmier-Aufgaben eine py- oder ipynb-Datei. Die theoretischen Aufgaben werden in den Übungen ab dem 03.06.2025 besprochen. Um Punkte für die Programmieraufgaben zu erhalten, müssen Sie diese in den Programmierübungen vorstellen.