Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Mathematisches Institut
Prof. Dr. Florian Jarre
Dr. Erik Chudzik
Melinda Hagedorn
Kevin Wischnewski

29.05.2025

Aufgabe	26	27	28	Σ
Punkte				

Numerik I – 8. Übungsblatt

Aufgabe 26 (10 Punkte)

Es sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,\dots,n}$ für $a_{ij} \in \mathbb{C}$ eine Matrix. Zeigen Sie, dass jeder Eigenwert von A in mindestens einem Kreis $\overline{B_{r_i}(a_{ii})}$ mit $r_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ enthalten ist.

Aufgabe 27 (10 Punkte)

Sei $I = [a, b]$ und $h = \frac{b-a}{2}$.

(a) Leiten Sie die Simpson-Regel

$$S(f) = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$

her, indem Sie das Interpolationspolynom zu den Knoten a, $\frac{a+b}{2}$ und b integrieren.

(b) Zeigen Sie, dass die Simpson-Regel nicht nur Polynome 2. Grades, sondern auch Polynome 3. Grades exakt integriert.

(c) Leiten Sie daraus für $f \in C^4([a, b], \mathbb{R})$ die Fehlerdarstellung

$$R(f) := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S(f) = -\frac{1}{90} h^5 f^{(4)}(\xi), \qquad \xi \in [a, b]$$

her.
Hinweis: Da die Simpsonregel auch Polynome dritten Grades exakt integriert, wird insbesondere auch das Hermite Interpolationspolynom $p \in \mathbb{P}_3$ mit $p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2$, $p'(x_1) = f'(x_1)$, exakt integriert.

Aufgabe 28 (10 Punkte)

Es seien die Knoten

$$x_0 = 0, \quad x_1 = -\frac{1}{2\sqrt{5}} + \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{1}{2\sqrt{5}} + \frac{1}{2}, \quad x_3 = 1$$

gegeben.

(a) Berechnen Sie die Gewichte a_i, $0 \leq i \leq 3$ zur interpolatorischen Quadraturformel $Q(f) = \sum_{i=0}^{3} a_i f(x_i)$ zur Approximation von $\int_0^1 f(x)dx$ zu den gegebenen Knoten.

(b) Bestimmen Sie den Exaktheitsgrad der resultierenden Quadraturformel.

(c) Transformieren Sie die Quadraturformel aus (a) auf das Interval $[1, 3]$ und approximieren Sie mit Hilfe der transformierten Quadraturformel das Integral $\int_1^3 \ln^2(x)dx$. Vergleichen Sie mit dem tatsächlichen Wert des Integrals.

Programmier-Aufgabe 8 (4 Punkte)

Seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) Schreiben Sie eine Funktion `gauss(f,n)`, welche die Knoten und Gewichte der Gauss'schen Quadraturformel mit Exaktheitsgrad $2n + 1$ berechnet, um mit diesen das Integral $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ zu approximieren. Dabei dürfen Sie die genäherten Nullstellen $x_k = \cos\left(\pi \frac{4k-1}{4n+2}\right), k = 1, \ldots, n$ des n-ten Legendre-Polynoms anstelle der exakten Nullstellen verwenden.

(b) Sei $f(x) = x^{20}$.
Plotten Sie für f und eine Funktion Ihrer Wahl den Fehler von `gauss(f,n)` jeweils halblogarithmisch gegen n für $n = 0, \ldots, 30$.

Ihre Lösungen können Sie über das ILIAS bis zum 05.06.2025 10 Uhr abgeben. Verwenden Sie hierzu für die theoretischen Aufgaben eine PDF-Datei (höchstens 2 MB) und für die Programmier-Aufgaben eine py- oder ipynb-Datei. Die theoretischen Aufgaben werden in den Übungen ab dem 10.06.2025 besprochen. Um Punkte für die Programmieraufgaben zu erhalten, müssen Sie diese in den Programmierübungen vorstellen.