

Aufgabe	29	30	31	Σ
Punkte				

Numerik I – 9. Übungsblatt

Aufgabe 29 (10 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \sin(4x) + 2$. Berechnen Sie für das Integral

$$I(f) = \int_0^{0.1} f(x) dx$$

mittels folgender Integrationsformeln einen Näherungswert:

- (a) Mittelpunktsregel
- (b) Trapezregel
- (c) Simpsonregel

Vergleichen Sie das jeweils ermittelte Ergebnis mit dem tatsächlichen Wert der Integration (d.h. berechnen Sie das Integral exakt und vergleichen Sie das Ergebnis mit der jeweiligen Näherung).

Aufgabe 30 (10 Punkte)

Es sei das gewichtete Skalarprodukt

$$(f, g)_w = \int_{-1}^1 f(x)g(x)w(x)dx$$

mit dem Gewicht $w(x) = x^2$ gegeben.

- (a) Zeigen Sie, dass die Polynome $p_0(x) := 1$, $p_1(x) := x$, $p_2(x) := x^2 - \frac{3}{5}$ orthogonal zueinander bezüglich dieses Skalarprodukts stehen.
- (b) Zeigen Sie, dass das Polynom $p_3(x) := x^3 - \frac{5}{7}x$ orthogonal zu

$$\text{span}\{p_0(x), p_1(x), p_2(x)\}$$

bezüglich dieses Skalarprodukts ist.

Aufgabe 31 (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass für $h_0 = (b - a)$ und $h_1 = \frac{h_0}{3}$ die Größe $T_{1,1}$ im Romberg-Verfahren zur Approximation von $\int_a^b f(x) dx$ durch die 3/8-Regel, also

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{(b-a)}{8} \left(f(a) + 3f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + 3f\left(a + 2\frac{b-a}{3}\right) + f(b) \right),$$

gegeben ist.

Programmier-Aufgabe 9 (4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n \in \mathbb{N}$, eine Matrix, für die eine LR-Zerlegung (ohne Permutationsmatrix) existiert. Folgender Algorithmus berechnet die LR-Zerlegung von A (ohne Zeilentausch) und speichert L ohne die Diagonalelemente $l_{ii} = 1$, $i = 1, \dots, n$, im strikt unteren und R im oberen Dreiecksanteil von A :

Eingabe: Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Für $k = 1, \dots, n-1$:

 Für $i = k+1, \dots, n$:

$$a_{ik} = a_{ik}/a_{kk}$$

 Für $j = k+1, \dots, n$:

$$a_{ij} = a_{ij} - a_{ik}a_{kj}$$

Rückgabe: A

(a) Implementieren Sie obigen Algorithmus als Funktion LR.

(b) Seien $A = \begin{bmatrix} \epsilon & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ mit $\epsilon = 10^{-k}$, $k \in \mathbb{N}$ und $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Ferner sei $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für $k = 0, \dots, 30$ mit und ohne Zeilentausch, indem Sie die LR-Zerlegungen von A und PA mit LR berechnen und jeweils Vorwärts- und Rückwärtssubstitution verwenden. Plotten Sie auch die absoluten Fehler jeweils halblogarithmisch.

Ihre Lösungen können Sie über das ILIAS bis zum 12.06.2025 10 Uhr abgeben. Verwenden Sie hierzu für die theoretischen Aufgaben eine PDF-Datei (höchstens 2 MB) und für die Programmier-Aufgaben eine py- oder ipynb-Datei. Die theoretischen Aufgaben werden in den Übungen ab dem 17.06.2025 besprochen. Um Punkte für die Programmieraufgaben zu erhalten, müssen Sie diese in den Programmierübungen vorstellen.