

Optimierung I – 1. Übungsblatt

Aufgabe 1: (1 Punkt)

Es seien $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Man zeige, dass dann auch f mit

$$f(x) := \min_{1 \leq i \leq m} f_i(x)$$

stetig ist.

Aufgabe 2: (2 Punkte; davon 1 Pkt. für a-d und 1 Pkt. für e & f)

Berechnen Sie für die nachfolgenden Funktionen $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $f_4, f_5, f_6 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jeweils den Gradienten und die Hessematrix.

- (a) $f_1(x) := \text{spur}(ax^T)$ für $a \in \mathbb{R}^n$
- (b) $f_2(x) := \frac{1}{2}(b - a^T x)^2$ für $a \in \mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}$
- (c) $f_3(x) := \frac{1}{2} \exp(x^T Q x - a^T x)$ für $a \in \mathbb{R}^n$ und $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- (d) $f_4(x, y) := \exp(-\|x - y\|_2^2)$
- (e) $f_5(x, y) := (1 + x^T y)^p$ für $p \in \mathbb{N}$ mit $p \geq 2$
- (f) $f_6(x, y) := \|x - y\|_p^p$ für $p \in \mathbb{N}$ mit $p \geq 3$

Aufgabe 3: (1 Punkt)

Bestimmen Sie alle Extremalstellen, sowie die Art der Extrema, für die Funktion g mit

$$g(x, y) := \frac{1}{2} \|f(x, y)\|_2^2, \quad \text{wobei } f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y^2 - 2 \\ x(y^2 - 2) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4: (1 Punkt)

Die Frobeniusnorm einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist definiert als

$$\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |A_{i,j}|^2}.$$

Zeigen Sie:

- (a) $\text{spur}(A^T B) = \text{spur}(B A^T) = \text{spur}(A B^T)$ für $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$,
- (b) $\|A\|_F^2 = \text{spur}(A A^T) = \text{spur}(A^T A) = \sum_i \lambda_i(A^T A)$,
- (c) $\|A\|_2^2 = \lambda_{\max}(A^T A)$.

Besprechung in der Übung am 24.4. bzw. 27.4.26.