

Optimierung I – 10. Übungsblatt

Aufgabe 29: (2 Punkte)

Sei $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer. Für $x \in \mathbb{R}^n$ ist die Projektion $P_{\mathcal{S}}(x)$ definiert als die Minimalstelle von

$$\min_{y \in \mathcal{S}} \|x - y\|_2,$$

sofern diese Minimalstelle eindeutig ist, andernfalls ist die Projektion nicht definiert. Zeigen Sie:

- (a) Falls $\mathcal{S}$ konvex und abgeschlossen ist, so ist $P_{\mathcal{S}}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ definiert.
- (b) Falls $P_{\mathcal{S}}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ definiert ist, so ist $\mathcal{S}$ abgeschlossen.

Aufgabe 30: (3 Punkte)

Sei $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ nichtleer, konvex und abgeschlossen und $P \equiv P_{\mathcal{S}}$ die Projektion eines Punktes auf $\mathcal{S}$, wie in Aufgabe 29. Hier schreiben wir auch

$$P(x) = \operatorname{argmin}_{y \in \mathcal{S}} \|x - y\|_2.$$

Man zeige:

- (a) $(P(x) - x)^T (P(x) - y) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathcal{S}.$
- (b) $(P(y) - P(x))^T (y - x) \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$
- (c) $\|P(y) - P(x)\|_2 \leq \|y - x\|_2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$

Aufgabe 31: (1 Punkt)

Seien $d, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $d \neq 0$ und $M := \{x \mid \|x - (\bar{x} + d)\|_2 \leq \|d\|_2\}$ gegeben. Man gebe explizit eine Hyperebene an, die $\bar{x}$ von M trennt. (Mit Begründung)

Aufgabe 32: (2 Punkte)

Berechnen Sie jeweils die Projektion eines gegebenen Punktes $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ auf die folgenden Mengen:

- (a) $\mathcal{E} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2^2 - b^T x \leq 1\}$ für einen fest gewählten Vektor $b \in \mathbb{R}^n$.
- (b) $\mathcal{Q} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid l_i \leq x_i \leq u_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}\}.$
Dabei seien $l, u \in \mathbb{R}^n$ Vektoren mit $l_i \leq u_i \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$

Besprechung in der Übung am 26.6. und 29.6.26.