

### Optimierung I – 3. Übungsblatt

#### Aufgabe 8: (1 Punkt)

Sei  $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n$  konvex und nicht leer. Man zeige:  $\mathcal{K}^i$  und  $\bar{\mathcal{K}}$  sind konvex und es gilt  $\bar{\mathcal{K}}^i = \bar{\mathcal{K}} \subseteq \text{aff}(\mathcal{K})$ , sowie  $(\bar{\mathcal{K}})^i = \mathcal{K}^i$ .

#### Aufgabe 9: (1 Punkt)

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}^n$  konvex,  $a \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $D_1 := \{x \in D \mid a^T x \leq \beta\}$  und  $D_2 := \{x \in D \mid a^T x \geq \beta\}$ . Seien  $f_1 : D_1 \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f_2 : D_2 \rightarrow \mathbb{R}$  beide konvex und die Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) := \begin{cases} f_1(x) & x \in D_1 \\ f_2(x) & x \in D \setminus D_1 \end{cases}$$

sei auf ganz  $D$  stetig und für  $x \in D \cap \{x \mid a^T x = \beta\}$  fast überall differenzierbar. Man zeige, dass  $f$  konvex ist.

#### Aufgabe 10: (2 Punkte; davon 1 Pkt. für a-d und 1 Pkt. für e-g)

Für  $x \in \mathbb{R}^2$  sei

$$f(x) := \begin{cases} 5\sqrt{9x_1^2 + 16x_2^2} & x_1 \geq |x_2|, \\ 9x_1 + 16|x_2| & 0 < x_1 < |x_2|, \\ 9x_1 + 16|x_2| - x_1^9 & x_1 \leq 0. \end{cases}$$

- Man zeige, dass  $f$  stetig ist.
- Man gebe die Stellen an, an denen  $f$  nicht differenzierbar ist.
- Man skizziere die Höhenlinien  $f(x) \equiv 0$  und  $f(x) \equiv 15$ .
- Man zeige (mithilfe von Aufgabe 9), dass  $f$  konvex ist.
- Man gebe das Minimum von  $f$  an.
- Ausgehend vom Punkt  $(16, 9)^T$  wende man zwei Schritte des Verfahrens des steilsten Abstiegs  $x^{k+1} = x^k - \lambda_k \nabla f(x^k)$  mit Schrittweite  $\lambda_k$  aus der exakten line search (siehe Korollar 6.2.5) auf die Funktion  $f$  an.
- Konvergiert das Verfahren des steilsten Abstiegs gegen das Minimum von  $f$ ?