

Optimierung I – 4. Übungsblatt

Aufgabe 11: (2 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ eine konvexe Funktion und $z \in \mathbb{R}^n$ eine beliebige Richtung. Ferner sei $x \in \text{dom } f (= \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < \infty\})$, dem eigentlichen Definitionsbereich von f . Man zeige:

- (a) $(f(x + tz) - f(x))/t$ ist als Funktion von t schwach monoton wachsend für $t > 0$, und es gilt

$$f'(x, z) := \lim_{t \searrow 0} \frac{f(x + tz) - f(x)}{t} = \inf_{t > 0} \frac{f(x + tz) - f(x)}{t}.$$

Man gebe Beispiele an mit $f'(x, z) = \infty$ und $f'(x, z) = -\infty$.

- (b) Falls $x \in (\text{dom } f)^\circ$, so gilt $f'(x, z) \in \mathbb{R}$ für alle $z \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 12: (5 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ eine konvexe Funktion und $z \in \mathbb{R}^n$ eine beliebige Richtung. Ferner sei $x \in (\text{dom } f)^\circ$, dem Inneren des eigentlichen Definitionsbereichs von f . Man zeige:

- (a) $f'(x, \lambda z) = \lambda f'(x, z)$ und $f'(x, z + v) \leq f'(x, z) + f'(x, v)$ für alle $\lambda \geq 0$ und $z, v \in \mathbb{R}^n$.
(b) Der sogenannte **Subgradient** von f im Punkt x ,

$$\partial f(x) := \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid f(y) - f(x) \geq \xi^T(y - x) \ \forall y \in \mathbb{R}^n\},$$

ist nie leer.

Hinweis: Man zeige, dass

$$\text{epi } f := \left\{ \begin{pmatrix} y \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid w \geq f(y) \right\}$$

konvex ist und verwende einen geeigneten Trennungssatz.

- (c) (i) $f'(x, z) \geq \xi^T z$ für alle $\xi \in \partial f(x)$, $z \in \mathbb{R}^n$.
(ii) Es gibt ein M , sodass $f'(x, z) \leq M$ für alle $z \in \mathbb{R}^n$ mit $\|z\|_2 = 1$.
(d) $\partial f(x)$ ist kompakt.
(e) Es gilt $\partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$ falls f in x differenzierbar ist.