

Optimierung I – 5. Übungsblatt

Aufgabe 13: (3 Punkte)

- (a) Sei A eine rechteckige Matrix. Der Transpositionssatz von Gordan besagt dann:

$$\exists x \geq 0, x \neq 0 : Ax = 0 \Leftrightarrow \nexists u : A^T u < 0.$$

Man leite den Transpositionssatz von Gordan aus Satz 8.1.1 der Vorlesung her.

- (b) Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Aus dem Dualitätssatz der linearen Optimierung folgt: Falls

$$\max\{b^T y \mid A^T y \leq c\}$$

eine Optimallösung $\bar{y}$ besitzt, so gibt es ein $x \geq 0$ mit $Ax = b$ und $c^T x = b^T \bar{y}$. Man leite obige Aussage aus den KKT-Bedingungen (8.2.4) der Vorlesung her.

Hinweis: Man beachte, dass unter den Voraussetzungen $x \geq 0$ und $Ax = b$ gilt:

$$c^T x = b^T \bar{y} \Leftrightarrow x^T (A^T \bar{y} - c) = 0 \Leftrightarrow x_i (A^T \bar{y} - c)_i = 0 \text{ für } 1 \leq i \leq n.$$

(Das ist kein neuer Beweis des Dualitätssatzes, da letzterer bei der Herleitung von (8.2.4) benutzt wurde.)

- (c) Seien $C \subseteq \mathbb{R}^n$, $D \subseteq \mathbb{R}^m$ und $L : C \times D \rightarrow \mathbb{R}$. Man zeige

$$\inf_{x \in C} \sup_{y \in D} L(x, y) \geq \sup_{y \in D} \inf_{x \in C} L(x, y).$$

Aufgabe 14: (3 Punkte)

Man betrachte das Problem

$$(P) \quad \min\{e^{x_1+x_2} + (x_2+x_3)^2 + x_3 \mid x_1+x_2+x_3=0\}.$$

- (a) Man bestimme die Optimallösungen durch Auswertung der *KKT*-Bedingungen.
- (b) Man eliminiere die Variable x_3 und bestimme die Optimallösungen von (P) mit Hilfe des reduzierten Problems.
- (c) Man ersetze $x_1+x_2+x_3=0$ durch $(x_1+x_2+x_3)^2 \leq 0$. Sind die Optimallösungen des neuen Problems mit Hilfe der zugehörigen *KKT*-Bedingungen bestimmbar?

Aufgabe 15: (1 Punkt)

Es seien differenzierbare Funktionen $f, f_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ für $1 \leq k \leq m$ gegeben. Weiterhin seien ein Punkt $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ und Lagrangemultiplikator $y \in \mathbb{R}^m$ gegeben, die die KKT-Bedingungen zum Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad & | \quad f_i(x) \leq 0 \text{ für } 1 \leq i \leq p \\ & | \quad f_j(x) = 0 \text{ für } p < j \leq m \end{aligned}$$

erfüllen. Zeigen Sie das durch $\Delta x^* := 0 \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung des linearisierten Optimierungsproblems

$$\begin{aligned} \min_{\Delta x \in \mathbb{R}^n} \nabla f(\bar{x})^T \Delta x \quad & | \quad f_i(\bar{x}) + \nabla f_i(\bar{x})^T \Delta x \leq 0 \text{ für } 1 \leq i \leq p \\ & | \quad f_j(\bar{x}) + \nabla f_j(\bar{x})^T \Delta x = 0 \text{ für } p < j \leq m \end{aligned}$$

gegeben ist.

Besprechung in der Übung am 22.5.26 (der Termin am 25.5. entfällt aufgrund des Feiertags).