

Optimierung I – 6. Übungsblatt

Aufgabe 16: (4 Punkte)

Sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\bar{x} \in C$ gegeben. Der Tangentialkegel von C in $\bar{x}$ ist definiert durch

$$T(C, \bar{x}) = \{d \in \mathbb{R}^n \mid \exists (d^k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n, (\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{>0} : d^k \rightarrow d, \alpha_k \searrow 0, \bar{x} + \alpha_k d^k \in C \forall k \in \mathbb{N}\}.$$

Man zeige:

- (a) $T(C, \bar{x})$ ist ein abgeschlossener Kegel.
- (b) $T(C, \bar{x})$ ist im Allgemeinen nicht konvex.
- (c) Es gilt $T(C, \bar{x}) = \{d \in \mathbb{R}^n \mid \exists (x^k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq C, (\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{>0} : x^k \rightarrow \bar{x}, \frac{x^k - \bar{x}}{\alpha_k} \rightarrow d\}$
- (d) Für $x \in \mathbb{R}^n$ sei $\text{dist}(x, C) := \inf_{y \in C} \|x - y\|_2$. Dann gilt

$$T(C, \bar{x}) = \left\{ d \in \mathbb{R}^n \mid \liminf_{t \searrow 0} \frac{\text{dist}(\bar{x} + td, C)}{t} = 0 \right\}.$$

Aufgabe 17: (2 Punkte)

- (a) Sei $(C_i)_{1 \leq i \leq k}$ eine endliche Familie von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$.

Man zeige: Für alle $\bar{x} \in \bigcap_{i=1}^k C_i$ gilt

$$\bigcup_{i=1}^k T(C_i, \bar{x}) = T\left(\bigcup_{i=1}^k C_i, \bar{x}\right).$$

- (b) Gilt die analoge Aussage auch für unendliche Familien von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$?