MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. FLORIAN JARRE

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

17.1.2024

Aufgabe	1	2	3	Σ
Punkte				

Einführung in die Optimierung – 12. Übungsblatt

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Für festes $\beta > 0$ bestimme man das analytische Zentrum (d.h. die Minimalstelle der logarithmischen Barrierefunktion) von $\mathcal{P} := \{y \in \mathbb{R}^2 \;\mid\; y_1 \geq 0,\; \beta y_1 + y_2 \leq 3,\; \beta y_1 - y_2 \leq 3\;\}$. Wie ändern sich die zulässige Menge und das Zentrum, wenn die Bedingung $y_1 \leq 3/\beta$ hinzugefügt wird?

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Seien ferner

$$\mathcal{F} := \{(x, y, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\; A^T y + s = c,\; x \geq 0,\; s \geq 0\}$$

die (primal-dual) zulässige Menge und

$$\mathcal{F}^\circ := \{(x, y, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\; A^T y + s = c,\; x > 0,\; s > 0\}$$

die (primal-dual) strikt zulässige Menge. Man zeige: Ist $\mathcal{F}^\circ \neq \emptyset$, so ist die Menge

$$\mathcal{M}(\alpha) := \{(x, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid x^T s \leq \alpha \;\text{ und }\; \text{es }\; \text{gibt }\; \text{ein } y \in \mathbb{R}^m \;\text{ mit } (x, y, s) \in \mathcal{F}\}$$

für alle $\alpha \geq 0$ beschränkt.

Hinweis: Wie kann man für ein beliebiges $(x, s) \in \mathcal{M}(\alpha)$ und ein fest gewähltes $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s}) \in \mathcal{F}^\circ$ den Ausdruck $x^T s + \bar{x}^T \bar{s}$ umformulieren?

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Betrachten Sie das lineare Programm

$$\min\{x_1 + x_2 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 1,\; x_1, x_2, x_3 \geq 0\}.$$

1. Geben Sie die Optimallösungen an.
2. Bestimmen Sie den zentralen Pfad $\{(x(\mu), y(\mu), s(\mu)) \mid \mu > 0\}$.
3. Existiert $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{s}) = \lim_{\mu \to 0}(x(\mu), y(\mu), s(\mu))$? Wenn ja, ist $\bar{x}$ eine optimale Basislösung?

Abgaben sind im üblichen Format bis spätestens Dienstag, den 23.1.2024, um 18:00 Uhr als PDF (höchstens 2MB) an opt0@uni-duesseldorf.de zu senden.