MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. FLORIAN JARRE

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

24.01.2024

Aufgabe	1	2	3	Σ
Punkte				

Einführung in die Optimierung – 13. Übungsblatt

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Gegeben seien zwei nicht leere, endliche, disjunkte Mengen von Punkten $K_1, K_2 \subseteq \mathbb{R}^N$. Zu einer reellen Zahl α und $v \in \mathbb{R}^N$, $d \in \mathbb{R}$ sagen wir, die Hyperebene $\{p \in \mathbb{R}^N \mid v^T p = d\}$ “trennt K_1 von K_2 zum Niveau α”, wenn $v^T p \leq d - \alpha$ für alle $p \in K_1$ und $v^T p \geq d + \alpha$ für alle $p \in K_2$ gilt. Gesucht sind nun die Werte von v und d, für die α möglichst groß wird, wobei zusätzlich $\|v\|_\infty := \max\{|v_1|, \ldots, |v_N|\} \leq 1$ gelten soll.

(a) Sei (α^*, d^*, v^*) so, dass α^* maximal ist.

 (i) Ist $\alpha^* < 0$ möglich?

 (ii) Sei $\alpha^* > 0$. Kann es dann sein, dass $v^* = 0$ ist? Was wäre wenn dann die Nebenbedingung $\|v\|_\infty \leq 1$ fallen gelassen würde?

(b) Geben Sie ein lineares Programm an, aus dem die Lösung der obigen Aufgabe ablesbar ist. Das lineare Programm habe dabei die Form $\max\{b^T y \mid A^T y \leq c\}$ für geeignete Daten $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$. Geben Sie die Daten explizit an.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Betrachten Sie die zu den Daten $(A, b, c) \in \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ gehörigen linearen Programme

$$\text{(P)}\ \min\{c^T x \mid Ax = b,\ x \geq 0\}, \qquad \text{(D)}\ \max\{b^T y \mid A^T y + s = c,\ x \geq 0\}$$

und die entsprechenden Optimalitätsbedingungen

$$(*) \left\{ \begin{array}{rcll} A^T y + s & = & c, & \\ Ax & = & b, & \\ x_i s_i & = & 0 & \forall i = 1, \ldots, n, \\ x, s & \geq & 0 & \end{array} \right.$$

Zeigen Sie, dass die Lösungsmenge von $(*)$ konvex ist.

b.w.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Eine Matrix A heißt *total unimodular*, falls die Minoren von A nur die Werte -1, 0 oder 1 annehmen.

(a) Sei $A = (a_{jk})$ eine $m \times n$ Matrix mit folgenden Eigenschaften:

(i) $a_{jk} \in \{-1,\ 0,\ 1\}$ für $1 \leq j \leq m$ und $1 \leq k \leq n$;

(ii) in jeder Spalte von A stehen höchstens 2 von Null verschiedene Elemente;

(iii) die Zeilenindizes $\{1, \dots, m\}$ lassen sich in zwei disjunkte Mengen I_1 und I_2 einteilen, so dass gilt:

$$\begin{aligned} a_{jk} = a_{ik} \neq 0,\ i \neq j \quad &\Rightarrow \quad j \in I_1 \text{ und } i \in I_2 \text{ oder umgekehrt} \\ a_{jk} = -a_{ik} \neq 0,\ i \neq j \quad &\Rightarrow \quad i, j \in I_1 \text{ oder } i, j \in I_2. \end{aligned}$$

Man zeige, dass A unimodular ist.

(b) Sei A eine unimodulare $m \times n$ Matrix mit $\text{Rang}(A) = m$ und b ein Vektor mit ganzzahligen Komponenten. Man zeige, dass jede Basislösung von $Ax = b$ ganzzahlig ist.

Bemerkung: Die Matrix A des Transshipmentproblems (kommendes Kapitel 5.2 im Skript) ist unimodular.

Die Aufgaben sind nicht für die Klausurzulassung relevanat und werden wie üblich besprochen.