1. (5+5 Punkte)

   Gegeben sei in lineares Programm in Standardform und eine Basis J: (Mehr nicht)

   (a) Wie entscheiden Sie möglichst einfach, ob die Basis zulässig ist. Welche Rechnungen sind bei diesem Ansatz notwendig?

   (b) Wie entscheiden Sie möglichst einfach, ob die Basis optimal ist. Welche Rechnungen sind dann zusätzlich notwendig?

2. (5 Punkte)

   Man begründe oder widerlege: Wenn bei einem Paar von primalem und dualem linearen Programm in der Standardform die zulässige Menge des primalen Problems nichtleer und beschränkt ist, so ist auch auch die zulässige Menge des dualen Problems nichtleer und beschränkt.

3. (10+5 Punkte)

   Für $n \geq 3$ betrachten wir das Polyeder

   $\mathcal{P} := \{\ x \in I\!R^n \ \mid\ x \geq 0,\quad x_i + x_j + x_k \leq 1 \ \text{ für alle } 1 \leq i < j < k \leq n\ \}.$

   (a) Man zeige $\mathcal{P} \cap \{\ x \in I\!R^n \ \mid\ x_1 + x_2 + x_3 = 1\ \}$ ist eine (nichtleere) Extremalmenge von $\mathcal{P}$.

   (b) Für $c \in I\!R^n$ sei das Problem $\max\{\ c^T x \ \mid\ x \in \mathcal{P}\ \}$ in der Standardform eines dualen linearen Programms gegeben. (Dabei seien die Bedingungen $x \geq 0$ durch die äquivalente Formulierung $-x \leq 0$ ersetzt.) Welche Dimensionen hat das zugehörige primale lineare Programm? Man gebe den Vektor, der die Zielfunktion des primalen Programms definiert, explizit an.

4. (10+5+5 Punkte)

   Für $1 \leq i \leq 10$ sollen die Punkte (i, i^3) durch ein quadratisches Polynom q so approximiert werden, dass $\max_{1 \leq i \leq 10}\{|q(i) - i^3|\}$ minimal ist.

   (a) Formulieren Sie diese Aufgabe als lineares Programm im dualen Format. (Neben den Variablen für die Darstellung von q fällt eine Hilfsvariable für die Zielfunktion an.)

   (b) Ist die zulässige Menge für dieses Problem (in der dualen Form aus (a)) beschränkt?

   (c) Man gebe das primale Problem dazu an.

   (d) (10 Zusatzpunkte)

   Der Optimalwert des linearen Programms sei nicht Null. Wie viele passend ausgewählte Stützstellen (i, i^3) kann man weglassen, ohne dass sich der Optimalwert ändert?

5. (5+10+5 Punkte)

   Sei $f : I\!R^n \to I\!R$ ein Polynom mit $\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = \infty$.

   (a) Ist das BFGS-Verfahren mit exakter line search (d.h. $d^{(k)} := -H_k \nabla f(x^{(k)})$, $\lambda_k := \operatorname{argmin}_{\lambda \geq 0} f(x^{(k)} + \lambda d^{(k)})$ und $x^{(k+1)} := x^{(k)} + \lambda_k d^{(k)}$) zur Minimierung von f ausgehend von einem Punkt $x^{(0)} \in I\!R^n$ und Startmatrix $H_0 := I$ immer wohldefiniert solange $\nabla f(x^{(k)}) \neq 0$? (Begründung?)

   (b) Sei nun eine Instanz gegeben, für die das obige BFGS-Verfahren die Iterierten $x^{(k)}$ für $k \in \mathbb{N}$ erzeugt und seien ferner die Konditionen der auftretenden Matrizen H_k beschränkt. Man zeige, dass es unabhängig von k ein $\gamma > 0$ gibt, sodass für die generierten Suchschritte $d^{(k)}$ stets gilt $\nabla f(x^{(k)})^T d^{(k)} \leq -\gamma \|\nabla f(x^{(k)})\|_2 \|d^{(k)}\|_2$.

   (c) Man begründe (z.B. unter Verweis auf Sätze der Vorlesung), dass die $x^{(k)}$ unter der Voraussetzung aus (b) Häufungspunkte besitzen und für jeden Häufungspunkt $\bar{x}$ gilt $\nabla f(\bar{x}) = 0$.