MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. FLORIAN JARRE

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

13.10.2023

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
Punkte					

Einführung in die Optimierung – 2. Übungsblatt

Vorbemerkung (6+6+6+6 (+6) Punkte)

Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. In Abweichung zur Vorlesung nennen wir $\bar{x} \in [a,b]$ einen kritischen Punkt von f, falls folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

- $f'(\bar{x}) \geq 0$, falls $\bar{x} = a$
- $f'(\bar{x}) \leq 0$, falls $\bar{x} = b$
- $f'(\bar{x}) = 0$, falls $\bar{x} \in (a,b)$,
- $f(\bar{x}) \leq \min\{f(a), f(b)\}$.

1. Man begründe, dass es mindestens einen kritischen Punkt von f in $[a,b]$ geben muss.

2. Sei p das sogenannte Hermite-Polynom maximal dritten Grades, für das $p(a) = f(a)$ und $p(b) = f(b)$ sowie $p'(a) = f'(a)$ und $p'(b) = f'(b)$ gilt. Man gebe p explizit an und bestimme dazu die Parameter γ, δ in der Darstellung
$$p(x) \equiv f(a) + f'(a)(x-a) + \gamma(x-a)^2 + \delta(x-a)^3.$$

3. (Nullstellenbestimmung von p') Man gebe ein Programm (in Pseudo-code) an, das zu reellen Zahlen a, b, c die reellen Nullstellen von $ax^2 + bx + c$ numerisch stabil berechnet und in einem Vektor x der Dimension 0,1,2 oder 3 ausgibt, wobei nur im Fall $a = b = c = 0$ die Dimension 3 sei mit den Werten $x = (-1, 0, 1)^T$.

4. Man begründe, dass folgender Ansatz bei Abbruch einen Punkt $\hat{x}$ ausgibt, sodass ein kritischer Punkt $\bar{x}$ existiert für den $|\bar{x} - \hat{x}| \leq \epsilon$ gilt.

   Eingabe: a, b, ϵ und ein Programm zur Auswertung von f und f'.
   Teste ob a oder b ein kritischer Punkt von f ist.
   Wenn ja Stop, wenn nein so gibt es einen kritischen Punkt von f in (a,b).

   a) Falls $b - a \leq \epsilon$ und $f(a) \leq f(b)$ setze $\hat{x} = a$ und Stop.
      Falls $b - a \leq \epsilon$ und $f(b) < f(a)$ setze $\hat{x} = b$ und Stop.
   b) Berechne das Hermite-Polynom p zu f auf $[a,b]$.
      Dieses hat genau einen kritischen Punkt $\hat{x}$ in (a,b). (Warum?)
   c) Bestimme $f(\hat{x})$ und $f'(\hat{x})$.
   d) Wenn $f(\hat{x}) \leq \min\{f(a), f(b)\}$ so unterscheide
      - falls $|f'(\hat{x})| = 0$ Stop, $\bar{x}$ ist kritischer Punkt,
      - falls $f'(\hat{x}) > 0$ ersetze b durch $\hat{x}$ und gehe zu Schritt a),
      - falls $f'(\hat{x}) < 0$ ersetze a durch $\hat{x}$ und gehe zu Schritt a).
   e) Wenn $f(b) \leq f(a)$ ersetze a durch $\hat{x}$ und gehe zu Schritt a).
   f) Es gilt $f(a) < f(b)$; ersetze b durch $\hat{x}$ und gehe zu Schritt a).

5. Zusatzaufgabe (für "Pluspunkte"): Warum bricht das Verfahren aus Aufgabe 4. nicht immer nach endlich vielen Schritten ab? Wie könnte man das Verfahren modifizieren, dass es stets nach endlich vielen Schritten abbricht?

Abgaben sind erst ab dem 25.10. und bis spätestens Dienstag, den 31.10.2023, um 18:00 Uhr als PDF (höchstens 2MB) mit dem Betreff „Blatt X, Nachname“ an opt0@uni-duesseldorf.de zu senden. Die Lösungen müssen von einer Uni-Mailadresse und in jedem Fall als PDF-Datei versandt werden. Die PDF-Datei soll für eine eindeutige Zuordnung die Blattnummer, den Nachnamen und die Matrikelnummer im Namen tragen. Max Mustermann mit der Matrikelnummer 1234567 fügt demnach für seine Abgabe vom zweiten Blatt die Datei „2mustermann1234567.pdf“ an die E-Mail mit dem Betreff „Blatt 2, Mustermann“ an. Das Übungsblatt wird in der Übung am Mittwoch, dem 1.11.2023, um 8:30 Uhr im Raum 25.22.00.81 besprochen.