MATHEMATISCHES INSTITUT
PROF. DR. FLORIAN JARRE

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

10.11.2023

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
Punkte					

Einführung in die Optimierung – 5. Übungsblatt

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Sei $f(x) \equiv \frac{1}{2}x^TAx + b^Tx + c$ mit positiv definiter Matrix A.
- Man zeige, dass die Methoden (MM) und (HBM) der Vorlesung zur Minimierung von f exakt dieselben Iterierten x^k erzeugen.
- Man gebe die Initialisierung an, sodass das (NAG)-Verfahren in der in der Vorlesung angegebenen Form dargestellt werden kann.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Sei D eine positiv definite Diagonalmatrix und U eine orthogonale Matrix gleicher Dimension. Die Methode (HBM) werde einmal zur Minimierung von $f(z) \equiv \frac{1}{2}z^TAz - b^Tz + \gamma$ mit $A = UDU^T$ ausgehend von z^0 angewendet und einmal zur Minimierung von $\hat{f}(x) \equiv \frac{1}{2}x^TDx$ ausgehend von $x^0 := U^T(z^0 - z^*)$ mit $z^* := A^{-1}b$. Man zeige, dass die Iterierten in beiden Fällen die Beziehung $x^k := U^T(z^k - z^*)$ für $k \geq 0$ erfüllen und dass stets $\|x^k\|_2 = \|z^k - z^*\|_2$ gilt.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Sei wieder die Situation aus Aufgabe 2 gegeben. Man zeige, dass für die Wahl $\beta = 0$ in (HBM) d.h. für das Verfahren des steilsten Abstiegs, geanu dann Konvergenz von jedem Startpunkt aus gegeben ist, wenn für die Schrittweite gilt $\alpha \in (0,\ 2/\max_{1\leq i\leq n}\{D_{i,i}\})$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Sei wie in der Vorlesung,

$$\beta \in [0,1), \quad \alpha_i \in\ (0,2], \quad \beta_i := 1 + \beta - \alpha_i \in [-1,2), \quad \text{und } \gamma_i := \sqrt{\beta_i^2 - 4\beta}.$$

sowie $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & \beta_i \end{pmatrix}$. Sei ferner

$$\lambda_+ := \tfrac{1}{2}(\beta_i + \gamma_i), \quad \lambda_- := \tfrac{1}{2}(\beta_i - \gamma_i), \quad v_+ := \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_+ \end{pmatrix}, \quad \text{and} \quad v_- := \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_- \end{pmatrix}.$$

Man zeige $Mv_\pm = \lambda_\pm v_\pm$.

Abgaben sind erst ab dem 15.11. und bis spätestens Dienstag, den 22.11.2023, um 18:00 Uhr im üblichen Format an opt0@uni-duesseldorf.de zu senden.