Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
Punkte					

Einführung in die Optimierung – 8. Übungsblatt

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Es seien $s, y \in \mathbb{R}^n$ mit $s^T y > 0$ und eine symmetrische und positiv definite Matrix $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gegeben. Man zeige, dass die inverse BFGS-Aufdatierungsformel aus Aufgabe 3 von Blatt 7 äquivalent ist zu $H_+ = H_+^{BFGS}$ für

$$H_+ := H + \frac{(s - Hy)s^T + s(s - Hy)^T}{s^T y} - \frac{(s - Hy)^T y}{(s^T y)^2} ss^T.$$

(Letztere Aufdatierungsformel wurde in der Vorlesung vorgestellt.)

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Ein Waschmittelunternehmen erhält den Auftrag 42 Mengeneinheiten (ME) eines Waschmittels zu liefern. Dazu muss es mindestens 42 ME herstellen. Der Schadstoffausstoß beim gesamten Herstellungsprozess soll nicht mehr als 36 Schadstoffeinheiten (SE) betragen. Um den Auftrag zu erfüllen kann das Unternehmen auf zwei verschiedene Anlagen zurückgreifen: In Anlage 1 werden stündlich 3 ME des Waschmittels hergestellt und 2 SE ausgestoßen. Die Kosten zum Betrieb von Anlage 1 betragen 12 Geldeinheiten (GE) pro Stunde. In Anlage 2 werden stündlich 2 ME des Waschmittels hergestellt sowie 4 SE ausgestoßen. Die stündlichen Kosten betragen hier 4 GE. Bestimmen Sie grafisch, wie viele Stunden die Anlagen 1 und 2 jeweils in Betrieb genommen werden, um den Auftrag mit minimalen Kosten zu erfüllen.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Ein fiktiver Mathematikerfachartikelproduzent stellt Bleistifte und Kreide her. Die jeweiligen Produkte werden mit einem Profit von 35 bzw. 30 Euro pro Palette verkauft. Dabei bedarf die Herstellung einer Palette 15 bzw. 20 Qudadratmeter Verpackungsmaterial und 16 bzw. 10 Arbeitstunden. Der Produzent erhält wöchentlich 90 Quadratmeter Verpackungsmaterial von einem Zulieferer. Die Belegschaft besteht aus 2 Personen.
Wie hoch ist der maximale Profit in einer Woche bei einer Wochenarbeitszeit von maximal 30 Stunden? Formulieren Sie die Fragestellung als ein Optimierungsproblem der Form

$$\max\{b^T y \mid a_i^T y \leq c_i,\ i \in \{1, \ldots, n\},\ y \geq 0,\ y \in \mathbb{Z}^2\}$$

für geeignete Vektoren $b, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^2$ und Skalare $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ und lösen Sie das Problem graphisch.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Gegeben sei eine Folge von Messdaten $(a^{(i)}, b_i)_{1 \leq i \leq N} \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$. Es wird der lineare Zusammenhang

$$u^T a^{(i)} \approx b_i, \qquad 1 \leq i \leq N,$$

für ein geeignetes $u \in \mathbb{R}^d$ unterstellt. Um u zu schätzen, wird der Fehler $(u^T a^{(i)} - b_i)_{1 \leq i \leq N}$, in ausgesuchten Normen minimiert. Reformulieren Sie hierfür die nachfolgenden Problemstellungen als lineare Programme (Def. 2.1 im Buch), wobei die Spalten von A^T einfach die Vektoren $a^{(i)}$ sind:

$$\text{(a)} \quad \min_{u \in \mathbb{R}^d} \|Au - b\|_\infty, \qquad \text{(b)} \quad \min_{u \in \mathbb{R}^d} \|Au - b\|_1.$$

Abgaben sind bis spätestens Dienstag, den 12.12.2023, um 18:00 Uhr im üblichen Format an opt0@uni-duesseldorf.de zu senden.