MATHEMATISCHES INSTITUT

PROF. DR. FLORIAN JARRE

16.10.2024

Aufgabe	1	3	3	4	5
Punkte					

Optimierung II – 1. Übungsblatt

(**B**ewertung: Je Aufgabe 6 Punkte)

Aufgabe 1

Sei $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene, konvexe Menge, $c \in \mathbb{R}^n$ fest gewählt und $\lambda^* := \inf\{c^T x \mid x \in \mathcal{S}\}$. Für $\lambda \geq \lambda^*$ sei $\mathcal{S}(\lambda) := \mathcal{S} \cap \{x \mid c^T x \leq \lambda\}$. Man zeige

$$\mathcal{S}^{opt} := \mathcal{S} \cap \{x \mid c^T x = \lambda^*\} \ \text{ ist nicht leer und beschränkt}$$

$$\iff \mathcal{S}(\lambda) \ \text{ ist für ein } \lambda > \lambda^* \text{ nicht leer und beschränkt}$$

$$\iff \mathcal{S}(\lambda) \ \text{ ist für alle } \lambda > \lambda^* \text{ nicht leer und beschränkt.}$$

Aufgabe 2

Seien $\phi_1 : \ \mathcal{S}_1^\circ \to \mathbb{R}$ und $\phi_2 : \ \mathcal{S}_2^\circ \to \mathbb{R}$ selbst-konkordant mit $\mathcal{S}_1^\circ \cap \mathcal{S}_2^\circ \neq \emptyset$. Man zeige $\phi_1 + \phi_2 : \mathcal{S}_1^\circ \cap \mathcal{S}_2^\circ \to \mathbb{R}$ ist ebenfalls selbst-konkordant.

Aufgabe 3

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex und zweimal stetig differenzierbar. Man zeige:

$$\phi : \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) < 0\} \to \mathbb{R} \text{ mit } \phi(x) := -\ln(-f(x))$$

ist ebenfalls konvex und 2-mal stetig differenzierbar.

Aufgabe 4

Sei $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex. In leichter Verallgemeinerung zur Vorlesung bezeichnen wir eine Funktion $\phi : \ \mathcal{S}^\circ \to \mathbb{R}$ als α-selbstkonkordant zu einem Parameter $\alpha \geq 1$, falls die Richtungsableitungen stets die Bedingung

$$f'''_{x,h}(0) \leq 2\alpha (f''_{x,h}(0))^{3/2}$$

erfüllen. Man zeige: Wenn ϕ in obigem Sinn α-selbstkonkordant ist, so ist $\alpha^2\phi$ selbstkonkordant im Sinne der Vorlesung.

Aufgabe 5

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) \equiv \sin[x]^T A \cos[x]$$

für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, wobei $\sin[x]$ (bzw. $\cos[x]$) die komponentenweise Anwendung der Sinus-Funktion (bzw. Cosinus-Funktion) auf den Vektor x bezeichne. Man gebe $Df(x)$ an.

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am Mittwoch, dem 23.10.2024, um 14:30 Uhr im Raum 25.13.U1.32 besprochen. Abgabe zu Beginn der Übung oder in der Vorlesung davor.