Aufgabe	1	3	3	4	5
Punkte					

Optimierung II – 10. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei A eine reelle quadratische Matrix, deren Eigenwerte alle einen positiven Realteil besitzen. Zu lösen sei die lineare Gleichung für die symmetrische Matrix X:

$$A^T X + XA = I, \tag{1}$$

wobei I die Einheitsmatrix sei.

(a) Seien R, S beliebige quadratische Matrizen, die keine gemeinsamen Eigenwerte besitzen. Sei p das charakteristische Polynom von R. Man betrachte das Gleichungssystem für Y:

$$RY - YS = 0. \tag{2}$$

Man zeige induktiv, dass für jede Lösung von (2) und $k \geq 1$ auch $R^k Y = Y S^k$ gilt.

(b) Man zeige, dass für jede Lösung von (2) auch $p(R)Y = Yp(S)$ gilt.

(c) Man zeige, dass $p(S)$ nichtsingulär ist. (Welche Nullstellen hat p?)

(d) Man zeige, dass die Lösungen von (1) und (2) eindeutig sind.

Aufgabe 2

Sei $1 \leq k < n$ und sei $f : \mathcal{S}^n \to \mathbb{R}$ die Funktion, die eine Matrix $X \in \mathcal{S}^n$ auf die Summe der k größten Eigenwerte von X abbildet. Ist f überall differenzierbar?

Aufgabe 3

Seien $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $D \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

(a) Für $\det(D) \neq 0$, $\det(A - BD^{-1}C) \neq 0$, Vektoren $x, a \in \mathbb{R}^n$ und $y, b \in \mathbb{R}^m$ zeige man, dass die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{cases} Ax + By = a \\ Cx + Dy = b \end{cases} \quad \text{gegeben ist durch} \quad \begin{cases} x = (A - BD^{-1}C)^{-1}(a - BD^{-1}b) \\ y = D^{-1}(b - Cx) \end{cases}.$$

(b) Man löse $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mithilfe von (a).

Aufgabe 4

Man betrachte das Netzwerk mit den Ankern $a_1 := (-1,0)^T$, $a_2 := (1,0)^T$, $a_3 := (0,1)^T$ und dem Sensor $x_1 := (0,3)^T$, der mit allen drei Ankerpunkten verbunden sei.

(a) Man zeige, dass das Netzwerk eindeutig lokalisierbar ist.
Hinweis: Der Fall $\mathbb{R}^\delta$ mit $\delta \in \mathbb{N},\ \delta > 2$ kann auf den Fall $\delta = 3$ zurückgeführt werden.

(b) Man zeige, dass die Funktion

$$x \mapsto (\|a_1 - x\|_2^2 - 10)^2 + (\|a_2 - x\|_2^2 - 10)^2 + (\|a_3 - x\|_2^2 - 4)^2$$

eine lokale Minimalstelle besitzt, die nicht global optimal ist.

Dieses Übungsblatt wird in der Übung am Mittwoch, dem 8.1.2025, um 14:30 Uhr im Raum 25.13.U1.32 besprochen.